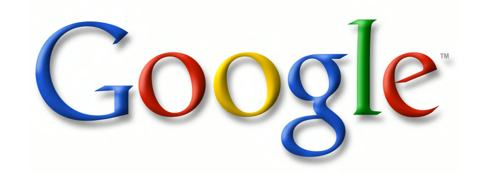




[F]remdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul. Nr. 55.

[G]eodäsie von Prof. Dr. C. Reinhertz. Mit 66 Abbildungen. Nr. 102.

[G]eographie, Mathematische, zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geißler. Mit 14 Figuren. Nr. 92.

— Physische, von Prof. Dr. Siegm. Günther. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

— siehe auch: Länderkunde.

[G]eologie von Dr. Eberh. Fraas. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.

[G]eometrie, Ebene, von Prof. G. Mahler. Mit 115 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— Analytische, der Ebene von Prof. Dr. M. Simon. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— Analytische, des Raumes von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— Projektive, von Dr. Karl Doehlemann. Mit 57 zum Teil zweifarbigen Figuren. Nr. 72.

[G]eschichte, Deutsche, im Mittelalter von Dr. F. Kurze. Nr. 33.

— Französische, von Prof. Dr. R. Sternfeld. Nr. 85.

— Griechische, von Prof. Dr. H. Swoboda. Nr. 49.

— des alten Morgenlandes von Prof. Dr. Fr. Hommel. Mit 6 Bildern und 1 Karte. Nr. 43.

— Oesterreichische, I: Von der Urzeit bis 1526 von Prof. Dr. Frz. v. Krones. Nr. 104.

— — II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Prof. Dr. Frz. v. Krones. Nr. 105.

— Römische, von Dr. Julius Koch. Nr. 19.

Geschichte, Sächsische, von Rektor Prof. Dr. O. Kaemmel. Nr. 100.

— der Malerei siehe: Malerei.

— der Musik siehe: Musik.

— der deutschen Sprache siehe: Grammatik, Deutsche.

Gesundheitslehre siehe: Menschliche Körper, Der.

Götter- und Heldensage siehe: Mythologie.

Gottfried von Straßburg siehe: Hartmann von Aue.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Dr. Otto Lyon. Nr. 20.

— Griechische, I: Formenlehre von Prof. Dr. Hans Meltzer. Nr. 117.

— — II: Syntax von Prof. Dr. Hans Meltzer. Nr. 118.

— Lateinische, von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 82.

— Mittelhochdeutsche, siehe: Nibelunge Nôt.

— Russische, von Dr. Erich Berneker. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch, — Lesebuch.

Graphischen Künste, Die, von Carl Kampmann. Mit 3 Beilagen und 40 Abbildungen. Nr. 75.

Harmonielehre von Musikdirektor A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfr. von Straßburg. Auswahl aus d. höf. Epos von Prof. Dr. K. Marold. Nr. 22.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. O. L. Jiriczek. Mit 3 Tafeln. Nr. 32.

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Sammlung Göschen, 87

Höhere Analysis

Erster Teil

Differentialrechnung

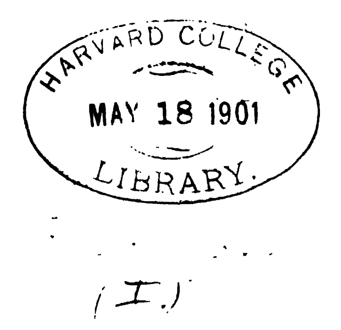
von

Dr. Fr. Junker
Professor am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm

Mit 68 Figuren im Text

Zweite, verbesserte Auflage

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1901



Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Inhalt.

III. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

IV. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittelung der Grenzwerte unbestimmter Formen.

V. Abschnitt.

Konvergenz und Divergenz der Reihen.

Seite

VI. Abschnitt.

Reihenentwickelung der Funktionen.

VII. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebene Geometrie.

IX. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie des Raumes.

X. Abschnitt.

Kurzer Exkurs auf das Gebiet der Mechanik.

I. Abschnitt.

Vorbereitung zur Differentialrechnung.

---

§ 1. Konstante und veränderliche Grössen. Begriff der Funktion.

1. Erklärung. Eine Grösse, welche nur einen einzigen bestimmten Wert hat, heisst konstant. Man bezeichnet solche Grössen mit a, b, c, ...; A, B, C, ...; α, β, γ, ...

2. Erklärung. Eine Grösse, welche beliebig viele Werte annehmen kann, heisst eine veränderliche oder variable Grösse oder kurz eine Veränderliche. Grössen dieser Art werden durch die Buchstaben x, y, z, ... oder X, Y, Z, ... oder ξ, η, ζ, ... angegeben.

3. Erklärung. Jeder Ausdruck, welcher konstante und veränderliche Grössen in irgend welcher Verbindung enthält, heisst eine Funktion dieser Grössen. Gewöhnlich bezeichnet man die Funktionen symbolisch mit den Buchstaben f, φ, ψ, ... oder mit F, Φ, Ψ, ... und versteht unter f(x), φ(x), ..., F(x), ... Funktionen, in welchen nur eine Veränderliche x enthalten ist, ebenso unter f(xy), φ(xy), ..., F(xy), ... Funktionen, in welchen zwei Veränderliche enthalten sind.

4. Wenn eine Funktion, die nur eine Veränderliche x enthält, gleich Null gesetzt wird

$$f(x) = 0,$$

so stellt sie eine algebraische Gleichung dar, die nur durch gewisse Werte von x befriedigt wird. Diese Werte (Wurzeln) aufzusuchen, ist Aufgabe der niederen Analysis. Beispielsweise wird die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

nur durch die 3 Werte $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ befriedigt, ihre Wurzeln sind also 1, 2, 3.

5. Wird dagegen die Funktion $f(xy)$, welche zwei Veränderliche x und y enthält, gleich Null gesetzt, so kann man einer Veränderlichen, z. B. x, irgend welche beliebige Werte beilegen und alsdann das zugehörige y daraus berechnen. Man bezeichnet alsdann die erste Veränderliche x als die unabhängige Veränderliche oder auch als das Argument und letztere y als die abhängige oder als die eigentliche Funktion. Erscheint die Gleichung nach y aufgelöst, also in der Form $y = f(x)$, so sagt man auch, y sei in entwickelter Form oder explizite in x ausgedrückt.

In den Formeln des freien Falles

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

sind beispielsweise die Geschwindigkeit v und der Weg s als entwickelte Funktionen der Zeit dargestellt.

Ebenso ist $z = f(xy) = x^2 + y^2$ eine entwickelte Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y.

In der Gleichung $f(xy) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ sind dagegen die Veränderlichen x, y, z unentwickelt (implizit) miteinander verbunden.

§ 2. Einteilung der Funktionen.

Die Funktionen, die in der Analysis vorkommen, werden eingeteilt in algebraische und transcendente.

Erklärung. Eine algebraische Funktion ist eine solche, in welcher Veränderliche und Konstante durch algebraische Operationen — Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Radizieren, Potenzieren — verbunden sind.

Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte algebraische Funktionen. Ist c eine Konstante und x eine Veränderliche, so sind

$$c,\ c + x,\ c - x,\ cx,\ \frac{c}{x},\ \sqrt{x},\ x^c$$

die einfachsten algebraischen Funktionen. Dagegen sind

$$a - x^2 \sqrt{c - x},\quad ax + \frac{c}{x^2} + b,\ \text{etc.}$$

als zusammengesetzte Funktionen zu bezeichnen.

Die algebraischen Funktionen zerfallen in rationale und irrationale Funktionen und die ersteren wieder in ganze und gebrochene rationale Funktionen.

Der Ausdruck

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ist eine ganze rationale Funktion,

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

eine gebrochene rationale Funktion einer Veränderlichen x.

Eine algebraische Funktion wird irrational, wenn die Veränderlichen auch unter dem Wurzelzeichen auftreten. Beispiele: $\sqrt{a - x}$, $ax + \sqrt{a^2 - x^2}$, etc.

Erklärung. Zu den einfachen transcendenten Funktionen gehören:

Die Exponentialfunktionen $y = a^x$, $y = e^x$;

Die logarithmische Funktion $y = \overset{a}{\log} x$ (gelesen: Logarithmus von x im System mit der Grundzahl a oder kurz im System a);

Die trigonometrischen Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

Die cyklometrischen Funktionen $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y = \operatorname{arc} \cos x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$.

§ 3. Die einfachen transcendenten Funktionen.

1. Exponential- und logarithmische Funktionen.

Erklärung. Funktionen von der Form $y = a^x$ heissen Exponentialfunktionen, solche von der Form $y = \log x$ logarithmische Funktionen.

Fasst man alle Zahlen als Potenzen mit der Basis 10 auf, so stellen die zugehörigen Exponenten die Logarithmen dieser Zahlen im System mit der Grundzahl oder Basis 10 dar. So ist

$$10^0 = 1,\ 10^{0,30103} = 2,\ 10^{0,47712} = 3, \ldots,\ 10^1 = 10,$$
$$10^2 = 100 \text{ etc.}$$

und bezeichnen 0; 0,30103; 0,47712; 1; 2 etc. die Logarithmen von 1, 2, 3, 10, 100 etc. im System 10.

Erklärung. Soll eine gegebene Zahl b als Potenz von a dargestellt werden, so heisst diese Operation das Logarithmieren; der gesuchte Exponent x in der Gleichung $b = a^x$ heisst der Logarithmus von b im System a. Die Zahl b heisst der Logarithmand und a die Basis oder Grundzahl des Logarithmensystems.

Die Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Grundzahl bilden ein logarithmisches System. Hierbei kann die Basis beliebig gewählt werden. Nur muss sie die Eigenschaft haben, mit beliebigen Zahlen potenziert, jede beliebige Zahl hervorzubringen. Daher können die Zahlen 0 und 1 sowie jede negative Zahl nicht Grundzahl eines Logarithmensystems werden.

Aus der Gleichung $b = a^x$ folgt durch Logarithmieren

$$\log b = x \log a$$

$$x = \frac{\log b}{\log a} = \overset{a}{\log} b$$

d. h.: Der Logarithmus von b für die Grundzahl a logarithmiert giebt den Logarithmus. Daher ist

$$b = a^x = a^{\overset{a}{\log} b},$$

d. h.: Die Basis a mit dem Logarithmus potenziert, giebt den Logarithmand.

Da für $b = 1$ folgt $1 = a^0$ oder $\overset{a}{\log} 1 = 0$, so gilt der

Satz. Der Logarithmus von 1 ist in jedem System gleich Null.

Für $b = a$ folgt $a = a^x$ oder $x = 1$ oder

$$\overset{a}{\log} a = 1.$$

Satz. Der Logarithmus der Zahl a im System a ist stets gleich 1.

Aus $b = a^x$ erhält man durch Logarithmieren

$$\log b = x \log a \quad \text{und} \quad x = \overset{a}{\log} b.$$

Dividiert man die vorletzte Gleichung mit $\log c$ durch, so folgt

$$\frac{\log b}{\log c} = x \frac{\log a}{\log c} \quad \text{oder} \quad \overset{c}{\log} b = x \overset{c}{\log} a$$

und hieraus

$$x = \overset{c}{\log} b : \overset{c}{\log} a.$$

Indem man obigen Wert von x mit diesem vergleicht, folgt

$$\overset{a}{\log} b = \overset{c}{\log} b : \overset{c}{\log} a.$$

Satz. Der Logarithmus der Zahl b im System a ist gleich dem Logarithmus von b im System c, dividiert durch den Logarithmus von a im gleichen System.

Dieser Satz dient dazu, die Logarithmen für das System a zu berechnen, wenn diejenigen im System c bekannt sind. So ist z. B.

$$\overset{4}{\log} 3 = \overset{10}{\log} 3 : \overset{10}{\log} 4 = 0{,}79239.$$

In der elementaren Mathematik werden nur die gemeinen oder Briggschen Logarithmen gebraucht, deren Grundzahl 10 ist. Ausser diesem kommt in der Analysis noch das natürliche oder Nepersche System zur Anwendung, dessen Grundzahl die irrationale Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$ ist, die wir in § 8 kennen lernen werden.

Erklärung. Der Logarithmus einer Zahl a im System e heisst der natürliche Logarithmus von a und wird allgemein bezeichnet durch

$$\overset{e}{\log} a = la.$$

Damit geht obige Formel über in

$$\overset{a}{\log} b = lb : la.$$

Erklärung. Der reziproke Wert $\frac{1}{la}$ des natürlichen Logarithmus von a heisst der Modul des gebrauchten Logarithmensystems mit der Grundzahl a und wird bezeichnet mit

$$Ma = \frac{1}{la}.$$

Satz. Der Logarithmus einer positiven Zahl b im System a ist gleich dem natürlichen Logarithmus von b, multipliziert mit dem Modul Ma

$$\overset{a}{\log} b = lb \cdot Ma.$$

Für die Briggschen Logarithmen ist $a = 10$ und

$$M_{10} = \frac{1}{l_{10}} = \overset{10}{\log} e = 0{,}43429448 \ldots$$

2. Trigonometrische Funktionen.

Erklärung. Die Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ heissen trigonometrische Funktionen.

Dieselben werden gewöhnlich durch Strecken im Kreis vom Radius 1 dargestellt.

Für $OA = 1$ ist $\sin\varphi = BF$, $\cos\varphi = OF$, $\operatorname{tg}\varphi = AE$, $\operatorname{ctg}\varphi = CD$.

In der Analysis dagegen werden die Winkel als Bögen in Teilen des Halbmessers angegeben. Die Zahl x, durch welche die

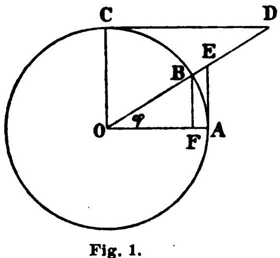


Fig. 1.

Grösse eines Winkels φ gemessen wird, ist eine absolute Zahl, nämlich die Längenzahl des zum Winkel φ gehörigen Bogens, gemessen auf einem Kreis vom Radius 1. Die volle Umdrehung, der Winkel von 360°, erhält den Zahlenwert 2π und der Winkel von φ^0 den numerischen Wert

$$x = 2\pi \frac{\varphi}{360} = \varphi : \frac{180}{\pi}.$$

Zu jeder Zahl x gehört alsdann ein sinus, cosinus, tangens, cotangens.

3. Cyklometrische Funktionen.

Betrachtet man umgekehrt x als Mass einer trigonometrischen Linie und stellt man sich die Aufgabe, den zugehörigen Bogen aufzusuchen, so gelangt man zu den inversen Kreisfunktionen oder den cyklometrischen Funktionen:

$$y = \text{arc}\sin x,\ y = \text{arc}\cos x,\ y = \text{arc}\,\text{tg}\, x,\ y = \text{arc}\,\text{ctg}\, x,$$

die somit als die Umkehrungen von $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$ zu betrachten sind.

Man versteht beispielsweise unter $y = \text{arc}\sin x$ (gelesen: arcus sinus von x) den Bogen (im Kreis vom Radius 1), dessen Sinus gleich x ist etc.

Beispielsweise ist

$$\text{arc}\,(\sin = 0) = \text{arc}\,(\cos = 1) = 0,$$

oder allgemeiner

$$\text{arc}\,(\sin = 0) = n\pi,\ \text{arc}\,(\cos = 1) = 2n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl ist. Ebenso ist

$$\text{arc}\,(\sin = 1) = \text{arc}\,(\cos = 0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Satz. Jede trigonometrische Gleichung kann in eine cyklometrische umgesetzt werden und umgekehrt. So zieht z. B. die trigonometrische Gleichung

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

die cyklometrische nach sich

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arc}(\sin = \cos\varphi),$$

und wenn wir $\cos\varphi = x$ setzen, folgt

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x.$$

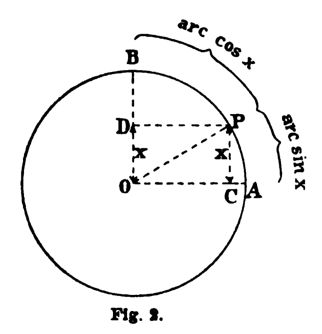


Fig. 2.

Setzt man in Fig. 2 $PC = OD = x$, so ist Bogen $PA = \operatorname{arc}\sin x$, $PB = \operatorname{arc}\cos x$

$$PA + PB = \frac{\pi}{2}.$$

§ 4. Geometrische Darstellung der Funktionen.

Die analytische Geometrie bietet ein einfaches Mittel dar, ein Bild jeder Funktion zu entwerfen für den Fall, dass in letzterer nicht mehr als eine oder zwei unabhängige Veränderliche auftreten.

Ist die abhängige Veränderliche y mit der unabhängigen x durch eine der Gleichungen

$$(1) \qquad y = f(x) \quad \text{oder} \quad \varphi(xy) = 0$$

verbunden, so kann man hierin x als Abscisse und y als Ordinate eines Kurvenpunktes betrachten. Alsdann stellt jede der Gleichungen (1) eine ebene Kurve dar, von welcher sich beliebig viele Punkte konstruieren lassen, indem man zu irgend einem Wert von x den zugehörigen Wert von y berechnet und in das Koordinatensystem einträgt.

Fig. 3.

Die Funktion $y = x^2$ stellt beispielsweise eine Parabel dar, welche die x-Achse im Ursprung berührt. Den Abscissen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ entsprechen die Ordinaten $1, 4, 9, \ldots$

Ihre Gestalt veranschaulicht die Figur 3.

Erklärung. Die den Gleichungen (1) entsprechenden Kurven heissen rational oder transcendent, je nachdem $f(x)$ bezw. $\varphi(xy)$ rationale oder transcendente Funktionen von x bezw. x und y sind.

Als Beispiele von rationalen Kurven seien die Ellipse (Fig. 4) und die Hyperbel (Fig. 5) angeführt, deren Gleichungen sind

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{bezw.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

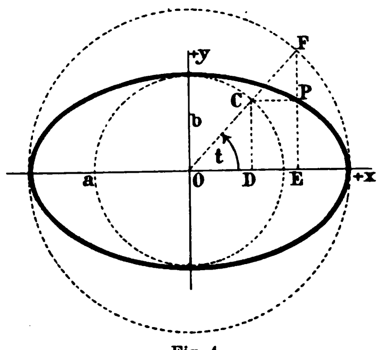


Fig. 4.

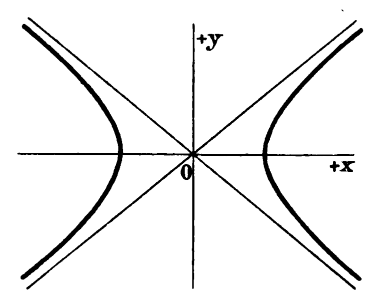


Fig. 5.

Beispiele von transcendenten Kurven liefern die Exponentiallinien $y = a^x$, $y = e^x$, die tri-

gonometrischen Kurven (Sinuslinie, Cosinuslinie, Tangenslinie etc.) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, die cyklometrischen Kurven $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y = \operatorname{arc} \cos x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, deren Gestalt wir im nächsten Paragraphen kennen lernen werden.

Sind in einer Gleichung drei Veränderliche xyz enthalten, so lassen sich dieselben als Koordinaten eines Punktes im Raum (Fig. 6) auffassen. Alsdann stellt jede der Gleichungen

$$z = f(xy) \quad \text{oder} \quad \varphi(xyz) = 0$$

eine Fläche dar, welche zweifach unendlich viele Punkte des Raumes enthält.

Ein Beispiel hierfür bietet die Funktion

$$z = x^2 + y^2$$

dar, welche ein Drehungsparaboloid repräsentiert, das

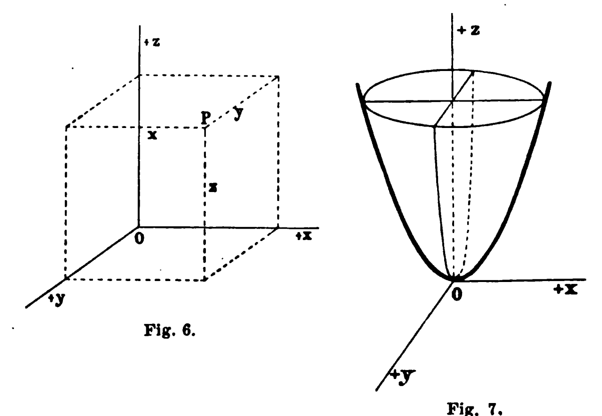


Fig. 6.

Fig. 7.

die xy-Ebene im Ursprung berührt und durch Fig. 7 veranschaulicht wird.

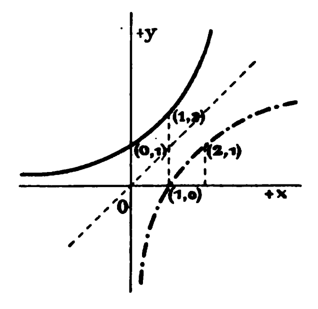


Fig. 8.

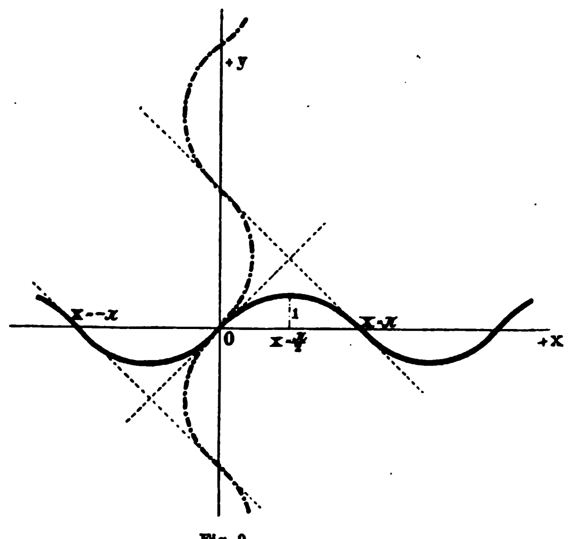


Fig. 9.

§ 5. Umkehrung der Funktionen.

Erklärung. Löst man die Gleichung $y = f(x)$, in welcher bis jetzt y in Funktion von x ausgedrückt ist, nach x auf, setzt man also $x = \varphi(y)$, so lässt sich hierin auch x als Funktion von y und letztere Veränderliche als unabhängige und x als abhängige be-

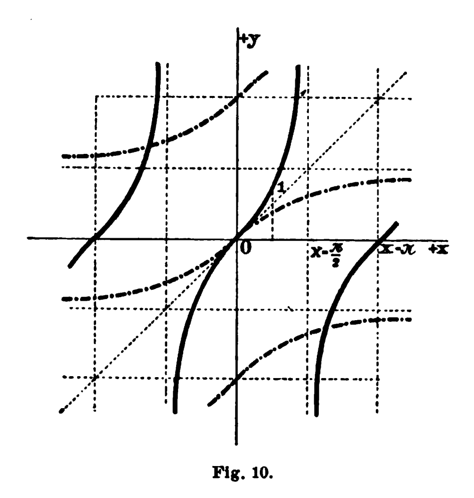


Fig. 10.

trachten. Vertauscht man nachträglich x mit y, um wieder x als unabhängige Veränderliche zu erhalten, so heisst $y = \varphi(x)$ die inverse oder umgekehrte Funktion von $y = f(x)$. Der Prozess des Überganges von $f(x)$ zu $\varphi(x)$ heisst entsprechend „Inversion oder Umkehrung" der Funktion $f(x)$.

Ist $\varphi(x)$ die Umkehrung von $f(x)$, so ist auch umgekehrt $f(x)$ die Umkehrung von $\varphi(x)$.

Stellt $y = f(x)$ eine ebene Kurve dar, so erhält man das Bild der inversen Funktion $y = \varphi(x)$, indem man dasjenige von $y = f(x)$ um die Halbierungslinie des von der + x-Achse und der + y-Achse gebildeten Winkels umklappt.

In den zu folgenden Beispielen gehörigen Figuren 8, 9, 10 sind die Bilder der inversen Funktionen strichpunktiert gezeichnet.

	Originalfunktion:		Inverse Funktion:
1.	$y = a^x$		$y = \overset{a}{\log} x$
	Exponentialkurve.	Fig. 8.	Logarithmuslinie.
2.	$y = \sin x$		$y = \operatorname{arc} \sin x$
	Sinuslinie.	Fig. 9.	Arcussinuslinie.
3.	$y = \operatorname{tg} x$		$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$
	Tangenslinie.	Fig. 10.	Arcustangenslinie.
4.	$y = \cos x$		$y = \operatorname{arc} \cos x$
	Cosinuslinie.		Arcuscosinuslinie.
5.	$y = \operatorname{ctg} x$		$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$
	Cotangenslinie.		Arcuscotangenslinie.

Die Bilder der Funktionen 4. und 5. sind ganz ähnliche Kurven wie die entsprechenden der Funktionen 2. und 3.

Ist die Gleichung einer Kurve in der impliziten Form $f(xy) = 0$ gegeben, so erhält man auch die Gleichung der inversen Kurve, indem man hierin x mit y vertauscht.

Ist $f(xy) = 0$ die Gleichung der Originalkurve, so ist diejenige der inversen Kurve dargestellt durch $f(y, x) = 0$.

Erklärung. Eine Funktion $f(xy) = 0$, die sich

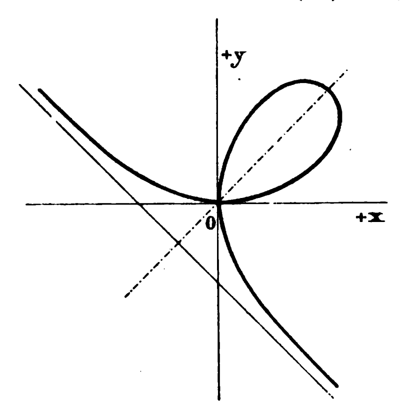


Fig. 11.

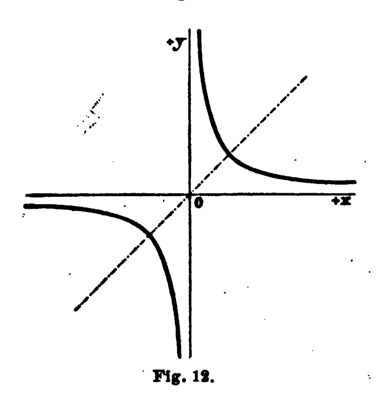


Fig. 12.

nicht ändert, wenn man die Veränderlichen x und y vertauscht, heisst sich selbstinvers.

Geometrisch stellt eine solche Funktion eine Kurve dar, die symmetrisch zur Halbierungslinie des von der $+$ x-Achse und der $+$ y-Achse gebildeten Winkels liegt.

Sich selbst inverse Funktionen sind beispielsweise die folgenden

$$x + y - a = 0, \quad a(x^2 + y^2) + bxy + c(x + y) + d = 0,$$
$$x^3 + y^3 - pxy = 0, \quad xy - a = 0,$$

von denen die beiden letzten — das Folium von Descartes und die gleichseitige Hyperbel — in den Figuren 11 und 12 dargestellt sind.

§ 6. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Funktionen.

Erklärung. Eine Funktion $y = f(x)$ heisst eindeutig, wenn zu irgend einem Wert von x nur ein einziger Wert von y gehört oder, geometrisch aus-

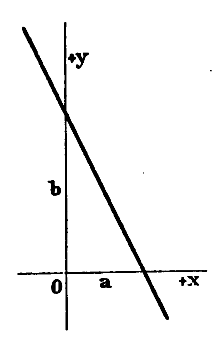


Fig. 13.

gedrückt, wenn die durch $y = f(x)$ dargestellte Kurve von jeder Parallelen zur x-Achse nur in einem einzigen Punkte geschnitten wird.

Beispiele.

Gerade Linie: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Fig. 13),

Parabel: $y = x^2$ (Fig. 3) etc.

Erklärung. Die Funktion $y = f(x)$ heisst n-deutig, wenn für einen Wert von x die Gleichung $y = f(x)$ n Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ von y liefert. Eine Parallele zur x-Achse schneidet in diesem Fall die Kurve $y = f(x)$ in n Punkten.

So ist z. B. $y = b + \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$ für alle Werte von $x < a + r$ und $x > a - r$ zweideutig, da man der Quadratwurzel sowohl das positive als auch das negative Zeichen geben kann. Sie wird eindeutig, wenn $r^2 - (x - a)^2 = 0$ d. h. wenn $x = a + r$ oder $x = a - r$ wird und 0-deutig für alle Werte von $x > a + r$ und $x < a - r$. Geometrisch stellt diese Funktion einen Kreis vom Radius r und den Mittelpunktskoordinaten a, b dar.

Für die rationalen Funktionen gilt der

Satz. Jede rationale Funktion ist eine eindeutige Funktion.

Beispiele von mehrdeutigen Funktionen bieten die irrationalen Funktionen dar.

§ 7. Der Begriff der Grenze. Grenzwert einer Funktion.

1. Setzt man

(1) $a_1 = 0{,}6;\ a_2 = 0{,}66;\ a_3 = 0{,}666;\ \ldots,$

so kann man den Index n der Zahl a_n so gross wählen, dass a_n sowie alle folgenden Zahlen a_{n+1},

$a_{n+2}, \ldots$ von dem Wert $a = \frac{2}{3}$ so wenig verschieden ist, als man will. Man nennt alsdann $\frac{2}{3}$ die Grenze der Zahlenreihe (1).

Erklärung. Wenn sich die Glieder der Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mehr und mehr einem bestimmten Zahlenwert $a\,(0, 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ nähern und ihr Unterschied von a schliesslich kleiner bleibt als irgend welche angebbare Grösse, so sagt man, die Reihe (1) habe den Wert a zur Grenze (limes) und bezeichnet denselben mit

$$\lim_{n=\infty} a_n = a \tag{2}$$

(gelesen: Limes a_n für $n \doteq \infty$ gleich a).

Beispiel. Für die Zahlenreihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$$

ist

$$a = \lim a_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Beispiel. Die Grenze der Zahlenreihe

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$$

zu bestimmen.

Man erhält

$$a = \lim a_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{x^n}.$$

Ist hierin

a) x eine ganze Zahl, so ist $a = \lim a_n = 0$, d. h.: Die Zahlenreihe nähert sich der Grenze 0,

oder

β) x ein echter Bruch, so ist $a = \lim a_n = \infty$, d. h.: Die Reihe hat die Grenze $a = \infty$.

2. Erklärung. Wenn sich eine Veränderliche x stets nur um eine beliebige kleine Grösse verändert (zu- oder abnimmt), so sagt man, sie verändere sich **stetig** und bezeichnet x selbst als eine **stetige Veränderliche** oder **stetige Variable**.

In der oben betrachteten Zahlenreihe (1) war die Annäherung an die Grenze $a = \frac{2}{3}$ unstetig, weil daselbst sprungweise von einer Zahl a_p zur nächsten a_{p+1} übergegangen wurde.

Die Annäherung an die Grenze a findet aber stetig statt, wenn der Übergang von einem Wert a_p zum nächsten nur um kleine Grössen ε fortschreitet, die man so klein wählen kann als man will und wobei die Bedingung erfüllt ist

$$x + \varepsilon > a \quad \text{oder} \quad x + \varepsilon < a,$$

je nachdem die Annäherung an die Grenze a von grösseren Werten a_p zu kleineren a_{p+1} oder von kleineren zu grösseren stattfindet.

3. Erklärung. Unter dem **Grenzwert** A einer **Funktion** f(x) versteht man den Wert, den dieselbe für einen bestimmten Wert der Veränderlichen $x = a$ annimmt. Man bezeichnet diesen Prozess ebenfalls mit

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

So ist beispielsweise

$$\lim (x^3 - a^3)_{x=a} = 0, \quad \lim \frac{x(2x-1)}{(x+2)(x-3)}\bigg|_{x=\infty} = 2.$$

4. In vielen Fällen tritt der Grenzwert einer Funktion auch in unbestimmter Form auf. Dann hat man die Aufgabe zu lösen, den wahren Wert derselben aufzusuchen. So geht beispielsweise die Funktion $\frac{x^3 - a^3}{x - a}$ für $x = a$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über. Dividiert man jedoch vorher mit $x - a$ durch, so folgt:

$$\lim \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim (x^2 + ax + a^2)_{x=a} = 3a^2.$$

Die Differentialrechnung bietet ein einfaches Mittel, den wahren Wert solcher unbestimmten Formen zu ermitteln, wie in § 31 u. ff. ausgeführt wird.

§ 8. Die Zahl e.

1. Setzt man in dem Ausdruck $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, so ergeben sich hierfür die Zahlenwerte $a_1 = 2$, $a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$, $a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,37037\ldots$, $a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2,4414\ldots$ etc., die fortwährend zunehmen und einem gewissen Grenzwert zustreben, der jedenfalls grösser als 2 ist.

Sind a und b den Bedingungen unterworfen

$$a > b > 0 \tag{1}$$

und ist n eine ganze positive Zahl, so ist offenbar

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n < (n+1)a^n, \tag{2}$$

somit auch

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a - b)(n + 1)a^n.$$

Setzt man hierin im Einklang mit der Bedingung (1)

$$a = 1 + \frac{1}{n}, \quad b = 1 + \frac{1}{n+1},$$

so folgt nach einiger Umformung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ein Ausdruck, der zeigt, dass in der Reihe der Zahlen a_1, a_2, a_3 ... jede folgende grösser ist als die vorhergehende. Setzt man andererseits ebenfalls in Übereinstimmung mit (1)

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1,$$

so geht die Ungleichung (2) über in

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2 \quad \text{oder} \quad \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Diese Ungleichung zeigt, dass, wie gross auch n wachsen möge, keine der Zahlen a_1, a_2, a_3 ... den Betrag 4 erreicht. Wir schliessen deshalb, dass der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für ein unendlich wachsendes n sich mehr und mehr einer zwischen 2 und 4 liegenden Grenze nähert. Diese Grenze wird allgemein mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Erklärung. Unter der Zahl e versteht man den Grenzwert, den der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ oder auch der folgende $(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$ für $\delta = 0$ erreicht.

$$(3) \qquad e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty} = \lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta=0}.$$

Die Zahl e ist irrational und näherungsweise angegeben durch $e = 2{,}7182818\ldots$

Man berechnet sie am einfachsten, indem man den Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt und nachträglich $n = \infty$ setzt

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

wo $\varkappa! = 1, 2, 3 \ldots \varkappa$ ist (gelesen: $\varkappa$-Fakultät).

2. Nimmt man in Formel (3) beiderseits die Logarithmen für die Basis a, so folgt

$$(4) \qquad \lim \frac{1}{\delta} \overset{a}{\log} (1+\delta)\Big|_{\delta=0} = \frac{0}{0} = \overset{a}{\log}\, e.$$

Wird die Zahl e selbst als Basis des Logarithmensystems angenommen, so bezeichnet man nach § 3 $\overset{e}{\log}$ mit l, womit sich ergiebt

$$(5) \qquad \lim \frac{1}{\delta}\, l(1+\delta)\Big|_{\delta=0} = le = 1.$$

Setzt man $\delta = a^x - 1$, so entspricht dem Wert $\delta = 0$ der Wert $x = 0$ und umgekehrt und folgt

$$a^x = \delta + 1, \; x = \log(\delta + 1) : \log a.$$

Weiter ergiebt sich hiermit

$$\lim \frac{a^x - 1}{x}\bigg|_{x=0} = \log a \lim \frac{\delta}{\log(\delta + 1)}\bigg|_{\delta=0}$$

$$= \frac{\log a}{\lim \log (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}} = \frac{\log a}{\log e}.$$

Es ist somit

$$\lim \frac{a^x - 1}{x}\bigg|_{x=0} = \frac{\log a}{\log e}, \tag{6}$$

oder, wenn e selbst Basis des Logarithmensystems ist

$$\lim \frac{a^x - 1}{x}\bigg|_{x=0} = l a. \tag{7}$$

Setzt man schliesslich noch $a = e$, so folgt

$$\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8}$$

§ 9. Die Summe der k^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen.

Bekanntlich ist

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1),$$

somit

$$\frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2};$$

ebenso

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

daher

$$\frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{n}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3} \quad \text{etc.}$$

In derselben Weise findet man

$$\lim \frac{S_3}{n^4} = \frac{1}{4}, \quad \lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}, \ldots, \lim_{n=\infty} \frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Satz. Der Quotient

$$\frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \ldots + n^k)$$

nähert sich mit unendlich wachsendem n der Grenze

$$\lim \frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Um das letztere allgemein zu beweisen, nehmen wir wie in § 8 an, es sei $a > b > 0$, dann ist offenbar, wenn wir in (2) § 8 zuerst für b das grössere a, dann für a das kleinere b setzen

$$(k+1)\,a^k > \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b} > (k+1)\,b^k.$$

Wird hierin $a = x + 1$, $b = x$, dann $a = x$, $b = x - 1$ gesetzt, so ergeben sich zwei Ungleichungen, die durch die folgenden zusammengefasst werden können

$$\frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} > x^k < \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Werden alle hieraus für $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ entspringenden Ungleichungen addiert und wird mit n^{k+1} dividiert, so folgen die weiteren Ungleichungen

$$\frac{(n+1)^{k+1} - 1^{k+1}}{n^{k+1}(k+1)} > \frac{S_k}{n^{k+1}} > \frac{1}{k+1},$$

die für $n = \infty$ übergehen in

$$\frac{1}{k+1} > \lim \frac{S_k}{n^{k+1}} > \frac{1}{k+1}.$$

Diese Ungleichungen können aber offenbar nur bestehen, wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

ist, was zu beweisen war.

§ 10. Die Grenzwerte von $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ etc.

Aus Fig. 1 folgt

$$BF < AB < AE$$

oder

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

daher ist auch

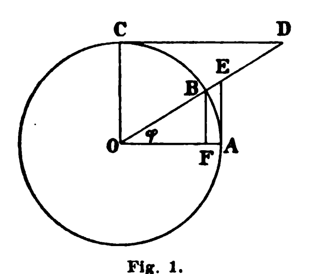


Fig. 1.

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

oder, wenn man mit sin x durchmultipliziert

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Für $x = 0$ wird $\cos x = 1$, daher ist im Grenzfall

$$\lim \frac{\sin x}{x}\bigg|_{x=0} \gtrless 1.$$

Diese Ungleichungen können aber gleichzeitig nur bestehen, wenn

$$\lim \frac{\sin x}{x}\Big|_{x=0} = 1$$

ist.

Um $\lim \frac{\sin mx}{x}\Big|_{x=0}$ zu ermitteln, setze man $mx = y$, dann folgt

$$\lim \frac{\sin mx}{x}\Big|_{x=0} = m \lim \frac{\sin y}{y}\Big|_{y=0} = m \cdot 1 = m.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\lim \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim \frac{\sin mx : x}{\sin nx : x}\Big|_{x=0} = \frac{m}{n}.$$

Es ist nun

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

daher

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Um $\lim \frac{\sin \operatorname{arc} \sin y}{y}\Big|_{y=0}$ zu bestimmen, setze man $\operatorname{arc} \sin y = x$, dann ist $y = \sin x$. Der Grenze $y = 0$ entspricht die Grenze $x = 0$, daher ist

$$\lim \frac{\operatorname{arc} \sin y}{y}\Big|_{y=0} = \lim \frac{x}{\sin x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Ebenso ist

$$\lim \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{\operatorname{arc} \cot x}{x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Satz. Die Grenzwerte folgender Funktionen sind dargestellt durch

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\sin mx}{x} = m,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} = m,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

§ 11. Unendlich kleine Grössen.

1. Erklärung. Wenn sich eine stetige Veränderliche α der Grenze 0 mehr und mehr nähert, so dass ihr Unterschied von 0 kleiner wird als jede angebbare Grösse, so sagt man, die Veränderliche sei unendlich klein.

Nähert sie sich mehr und mehr der Grenze unendlich (∞), so heisst sie unendlich gross.

2. Erklärung. Eine unendlich kleine Grösse β ist von höherer Ordnung unendlich klein als α, wenn

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

ist.

3. Erklärung. Zwei unendlich kleine Grössen α und β heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von 0 verschiedenen endlichen Grenzwert konvergiert

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = A.$$

4. Erklärung. Ist α eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, so ist $\beta = A\alpha^2$ eine unendlich kleine

Grösse zweiter Ordnung, $\gamma = B\alpha^3$ eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung etc., wo A, B, ... endliche, von 0 verschiedene Zahlen bezeichnen.

5. Erklärung. Die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen gründet sich auf folgenden

Satz. Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ist im Vergleich zu einer solchen niederer Ordnung selbst unendlich klein und kann deshalb in der Rechnung dieser gegenüber vernachlässigt werden.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es sei $\beta = A\alpha^m$ eine unendlich kleine Grösse von der m^{ten} Ordnung, $\gamma = B\alpha^n$ eine solche von der n^{ten} Ordnung, wo $m > n$ ist, dann ist

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{A}{B}\alpha^{m-n} = \frac{A}{B}\alpha^d,$$

wo $d = m - n > 0$ ist, daher ist auch

$$\frac{\beta + \gamma}{\gamma} = \frac{A}{B}\alpha^d + 1,$$

somit

$$\lim \frac{\beta + \gamma}{\gamma} = 1$$

oder

$$\beta + \gamma = \gamma,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Eine Anwendung findet dieser Satz beispielsweise bei der Quadratur einer Kurve.

6. Erklärung. Unter der Quadratur einer Kurve versteht man gewöhnlich die Berechnung des Inhaltes U der Fläche (Fig. 14), welche von den Ordinaten y_0

und y_n zweier Kurvenpunkte P_0 und P_n, dem Kurvenbogen $P_0 P_n$ und der Abscissenachse eingeschlossen wird.

Teilt man die Strecke $A_0 A_n = x_n - x_0$ in n gleiche Teile

$$A_0 A_1 = A_1 A_2 = \ldots = A_{n-1} A_n = \alpha = \frac{1}{n}(x_n - x_0),$$

die für $n = \infty$ die Grenze 0 haben sollen und berechnet man die zugehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ aus der gegebenen Kurvengleichung $y = f(x)$, so lässt

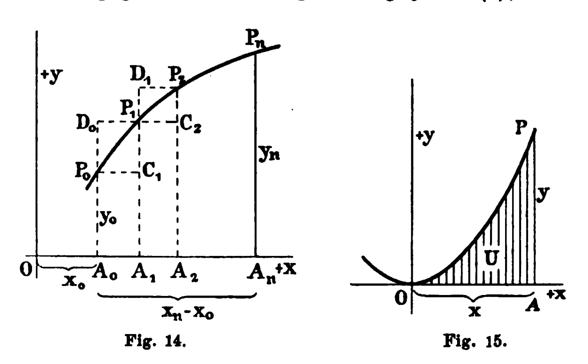


Fig. 14. Fig. 15.

sich der Flächeninhalt U als die Grenze betrachten, welcher die Summe der Rechtecke

$$Un = D_0 A_0 A_1 P_1 + D_1 A_1 A_2 P_2 + \ldots$$

oder auch die Summe der folgenden

$$U_n' = P_0 A_0 A_1 C_1 + P_1 A_1 A_2 C_2 + \ldots$$

bei unendlich wachsendem n zustrebt

$$U = \lim (y_1 \alpha + y_2 \alpha + \ldots + y_n \alpha)_{n=\infty}$$
$$= \lim (y_0 \alpha + y_1 \alpha + \ldots + y_{n-1} \alpha)_{n=\infty},$$

denn jedes dieser Rechtecke ist für $n = \infty$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, gegen welche die Flächenstücke $D_0P_0P_1$, $D_1P_1P_2$, ... bezw. $P_0C_1P_1$, $P_1C_2P_2$, ..., welche zur Vervollständigung des gesuchten Flächeninhaltes U subtrahiert oder addiert werden müssen, als unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung nach dem Satz in Nr. 5 dieses Paragraphen ohne Fehler vernachlässigt werden dürfen.

Beispiel. Die Parabel (Fig. 15) zu quadrieren.

Teilt man $OA = x$ in n gleiche Teile $\frac{x}{n}$, denen die Ordinaten

$$y_1 = \frac{ax^2}{n^2},\ y_2 = 4a\frac{x^2}{n^2},\ y_3 = 9a\frac{x^2}{n^2},\ \ldots,\ y_n = n^2a\frac{x^2}{n^2}$$

entsprechen, dann ist der Inhalt U des Flächenstücks

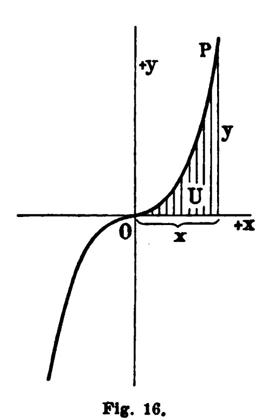


Fig. 16.

OAP gleich dem Grenzwert, welchem die Summe der Rechtecke

$$U = a\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{x}{n} + 4a\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{x}{n} + \ldots + n^2 a\frac{x^2}{n^2}\cdot\frac{x}{n}$$

$$= a\frac{x^3}{n^3}(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)$$

bei unendlich wachsendem n mehr und mehr zustrebt. Nun ist bekanntlich die Summe der n ersten Quadratzahlen

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

daher

$$U = \frac{ax^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = ax^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right),$$

ein Ausdruck, der für $n = \infty$ übergeht in

$$U = \frac{ax^3}{3} = \frac{1}{3}xy.$$

Beispiel. Berechne in gleicher Weise den Inhalt U der Wendepunktsparabel $y = ax^3$ (Fig. 16)

$$U = \frac{1}{4}xy.$$

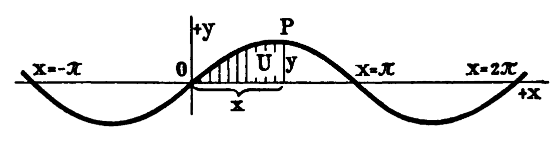


Fig. 17.

Beispiel. Den Inhalt der Sinuslinie $y = \sin x$ zu berechnen (s. Fig. 17).

§ 12. Endlichkeit und Stetigkeit der Funktionen.

1. Erklärung. Eine Funktion $y = f(x)$ ist innerhalb eines Gebietes von $x = a$ bis $x = b$ endlich, wenn zu jedem Wert von x innerhalb dieses Gebietes ein endlicher Wert von y gehört.

2. Sie ist zugleich stetig innerhalb dieses Gebietes, wenn jeder noch so kleinen Änderung von x innerhalb desselben eine ebenfalls noch so kleine Änderung von y entspricht.

3. Erklärung. Eine Funktion $y = f(x)$ wird für $x = a$ unstetig, wenn sie für diesen Wert unendlich wird oder wenn sie bei einer stetigen Änderung von x an dieser Stelle plötzlich einen Sprung macht.

Wir unterscheiden also „Unstetigkeit durch Unendlichwerden" und „Unstetigkeit durch endlichen Sprung".

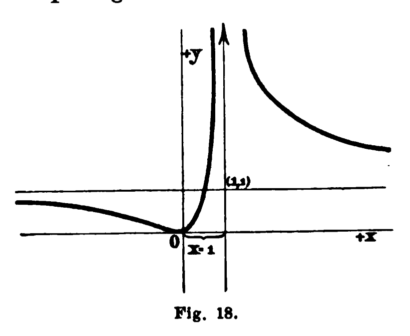


Fig. 18.

Als Beispiel für den ersten Fall sei die Funktion $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ angeführt, welche für $x = 1$ unstetig wird und geometrisch eine Kurve dritter Ordnung dar-

stellt, welche in $x = 1$ einen unendlich fernen Punkt besitzt und die in Fig. 18 angegebene Gestalt hat.

Unstetigkeiten durch endlichen Sprung sollen hier nicht weiter betrachtet werden, da sie in den folgenden

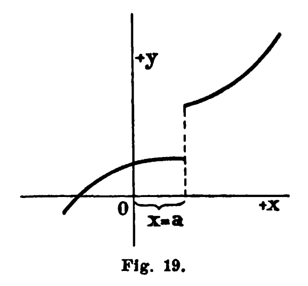


Fig. 19.

Untersuchungen nicht vorkommen. Eine Funktion, welche für $x = a$ in dieser Art unstetig wird, ist geometrisch in Fig. 19 veranschaulicht.

II. Abschnitt.

Differenzen, Differentiale und Ableitungen erster Ordnung.

---

§ 13. Herleitung des Differentialquotienten.

Lässt man in der Gleichung $y = f(x)$ die Veränderliche x um die Grösse $\triangle x$ zu- oder abnehmen, dann verändert sich offenbar auch y um eine gewisse Grösse, die mit $\triangle y$ bezeichnet werden soll. Geht hierbei die gegebene Funktion $y = f(x)$ über in

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x),$$

so erhält man durch Subtraktion und Division mit $\triangle x$ den Ausdruck

$$\text{(1)} \qquad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x},$$

der als „erster Differenzenquotient" oder kurz als „Differenzenquotient von f(x)" bezeichnet wird.

Es sollen sich nun $\triangle x$ und damit auch $\triangle y$ als stetige Veränderliche der Grenze 0 nähern, ohne dass sie dieselbe auch wirklich erreichen. Man sagt dann, $\triangle x$ und $\triangle y$ werden unendlich klein.

Erklärung. Die unendlich klein gewordenen (oder im Verschwinden begriffenen) Zunahmen $\triangle x$ und $\triangle y$ werden kurz mit dx und dy geschrieben und „Differentiale" genannt, und zwar heisst dx das Differential des Arguments x und $dy = df(x)$ das der Funktion $y = f(x)$.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim \frac{\triangle y}{\triangle x}$ wird dementsprechend kurz als „Differentialquotient" bezeichnet und durch eines der Zeichen festgesetzt

$$\text{(2)} \qquad \lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx}.$$

Bei diesem Grenzübergang wird die rechte Seite der Gleichung (1) im allgemeinen nicht unbestimmt werden, sondern in eine neue Funktion von x übergehen, welche nach Lagrange mit $f'(x)$ bezeichnet wird und die abgeleitete Funktion oder kurz die Ableitung von f(x) heisst. Es gilt daher der

Satz. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist, gleich der Ableitung $f'(x)$ von f(x)

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx} = \lim \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x).$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$dy = f'(x)\,dx,$$

so ergiebt sich der

Satz. Das Differential der Funktion ist gleich der Ableitung von f(x) multipliziert mit dem Differential des Arguments.

Es ist Aufgabe der Differentialrechnung, zu einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ zu ermitteln.

Beispiele. 1. Die Ableitung der Funktion

$$y = \frac{1}{a + x}$$

zu bilden.

Man erhält

$$y + \triangle y = \frac{1}{a + x + \triangle x}$$

und hieraus

$$\triangle y = \frac{1}{a + x + \triangle x} - \frac{1}{a + x} = \frac{-\triangle x}{(a + x)(a + x + \triangle x)}$$

und somit für den Differenzenquotienten den Ausdruck

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{1}{(a + x)(a + x + \triangle x)},$$

der für $\triangle x = 0$ in den Differentialquotienten übergeht

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(a + x)^2}.$$

2. Bilde ebenso die Ableitung von $y = \sqrt{x}$.

§ 14. Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

1. Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Kurve bezogen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, ferner α' der Winkel, den die Sekante PP' zweier Kurvenpunkte P und P' mit den Koordinaten x,

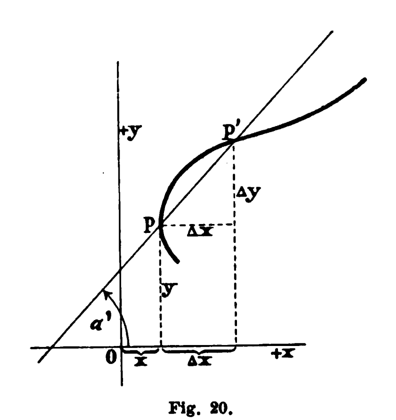


Fig. 20.

y und $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ mit der positiven x-Achse macht, so ist offenbar (Fig. 20)

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Satz. Der Differenzenquotient ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels α', um welche die Sekante PP' von der positiven x-Achse im Sinne der Pfeilrichtung abweicht.

Rücken die beiden Punkte P′ und P unendlich nahe zusammen, was der Fall ist, wenn sich $\triangle x$ und $\triangle y$ der Grenze Null nähern, so geht die Sekante PP′ in die Tangente im Punkte P über: es ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die Kurventangente im Punkt mit der Abscisse x mit der + x-Achse macht.

Satz. Der Differentialquotient ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels α, um welchen die Kurventangente im Punkt mit der Abscisse x im Sinn der Pfeilrichtung von der x-Achse abweicht.

Sind $\xi\eta$ die laufenden Koordinaten, so erhält die Sekante PP′, bezw. die Kurventangente im Punkt P die Gleichung

$$\eta - y = \frac{\triangle y}{\triangle x}(\xi - x), \text{ bezw. } \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

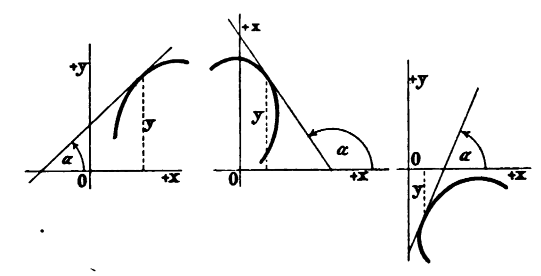


Fig. 21.

2. Die Kurve (Fig. 22), deren Gleichung $y = f(x)$ ist, soll zwischen den beiden Punkten P und P_1 durchweg

eindeutig, endlich und stetig verlaufen. Dies vorausgesetzt, wird sie letztere durch ein stetig zusammenhängendes Kurvenstück verbinden, das die Sehne PP_1 ein- oder mehrfach schneiden oder auch ausser in P_1 und P nicht mehr treffen kann. Auf alle Fälle aber wird sich, wie geometrisch unmittelbar einleuchtet, zwischen P und P′ ein Kurvenpunkt Q ermitteln lassen, dessen Tangente parallel zur Sehne PP_1 ist. Die Abscisse ξ dieses Punktes ist $\xi = 0D > x$ und $< x + h$ und kann deshalb gleich

$$\xi = x + \vartheta h$$

gesetzt werden, wo ϑ ein rechter positiver Bruch $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ ist.

Die Richtung der Tangente in diesem Punkt ist nach Nr. 1 angegeben durch

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x + \vartheta h)$$

und die der Sehne PP_1 durch

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{P_1E}{PE} = \frac{1}{h}\{f(x + h) - f(x)\}.$$

Fig. 22.

Die Sehne ist somit parallel zur Tangente, wenn

$$\frac{1}{h}\{f(x + h) - f(x)\} = f'(x + \vartheta h)$$

oder

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h)$$

ist.

Aus dieser Gleichung lässt sich ϑ berechnen, wenn die beiden Punkte P und P_1 gegeben sind.

Beispiel. Den Punkt P der Parabel $y = x^2$ zu bestimmen, dessen Tangente parallel zur Sehne PP_1 ist. Die Punkte P und P_1 haben die Abscissen x und $x + h$, dann bestimmt sich ϑ aus

$$(x + h)^2 - x^2 = h\,2\,(x + \vartheta h)$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}.$$

Der gesuchte Parabelpunkt hat also die Abscisse

$$\xi = x + \frac{h}{2}.$$

In algebraischem Sinn lässt sich vorstehendes Resultat aussprechen als

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Wenn eine Funktion $f(x)$ innerhalb eines Gebiets von x bis $x + h$ eindeutig und stetig verläuft (die Grenzen mit eingeschlossen), so gilt die Beziehung

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

§ 15. Ableitung einfacher algebraischer Funktionen.

Unter der Voraussetzung, dass c eine Konstante ist, folgt aus

$$1. \qquad y = c, \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{c - c}{\triangle x} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \alpha = 0.$$

Satz. Der Differentialquotient einer Konstanten ist stets gleich 0.

Dies leuchtet auch geometrisch ein, wenn man bedenkt, dass $y = c$ oder $y - c = 0$ eine Parallele zur x-Achse darstellt, die mit allen ihren Tangenten zusammenfällt, welche mit der x-Achse den $\sphericalangle\, \alpha = 0$ machen.

2. $$y = c + x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 1,$$
$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

3. $$y = c - x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad \frac{dy}{dx} = -1,$$
$$\operatorname{tg} \alpha = -1, \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi.$$

4. $$y = cx, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c(x + \Delta x) - cx}{\Delta x} = c, \quad \frac{dy}{dx} = c,$$
$$\operatorname{tg} \alpha = c, \quad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} c.$$

Gerade Linie durch den Ursprung

5. $$y = \frac{c}{x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{c}{x(x + \Delta x)}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2},$$
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{c}{x^2}.$$

$$y = \frac{c}{x} \quad \text{oder} \quad xy - c = 0$$

stellt eine gleichseitige Hyperbel dar.

6. $$y = x^c.$$

α) c sei eine positive ganze Zahl, dann erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^c - x^c}{\Delta x}$$

und wenn man hierauf den binomischen Lehrsatz anwendet und rechts mit Δx durchdividiert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cx^{c-1} + \frac{c(c-1)}{2 \cdot 1} x^{c-2} \Delta x + \ldots,$$

woraus für $\Delta x = \Delta y = 0$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^c}{dx} = cx^{c-1}.$$

Für $c = 1, 2, 3, \ldots$ stellt $y = x^c$ eine Reihe von sogenannten parabolischen Kurven dar, welche die x-Achse im Ursprung berühren und sich an dieselbe um so mehr anschmiegen, je grösser c ist (Fig. 3, 15, 16).

β) Ist c eine ganze negative Zahl $c = -k$, wo k positiv, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{(x + \Delta x)^k} - \frac{1}{x^k} = - \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{x^k (x + \Delta x)^k},$$

wo der Ausdruck im Zähler beim Übergang zur Grenze den Wert kx^{k-1} annimmt. Es ist daher

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = - kx^{-k-1} = cx^{c-1}.$$

Die Funktion $y = \frac{1}{x^k}$ oder $yx^k - 1 = 0$ stellt für $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine Reihe von sogenannten hyperbolischen Kurven dar, welche die y-Achse und x-Achse im Unendlichen berühren und sich der letzteren um so mehr nähern, je grösser k wird.

γ) Ist endlich c ein Bruch $c = \frac{m}{n}$, so ist

$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{oder} \quad y^n = x^m.$$

Hieraus folgt nun

$$(y + \triangle y)^n - y^n = (x + \triangle x)^m - x^m.$$

Dividiert man beiderseits mit $\triangle x$ und multipliziert man ausserdem noch die linke Seite mit $\frac{\triangle y}{\triangle y} = 1$, so folgt

$$\frac{(y + \triangle y)^n - y^n}{\triangle y} \cdot \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^m - x^m}{\triangle x}.$$

Da hierin m und n ganze Zahlen sind, so folgt beim Übergang zur Grenze

$$n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$$

und hieraus mit Berücksichtigung der gegebenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = c x^{c-1}.$$

Satz. Der Differentialquotient der Potenz x^c ist stets $\frac{dy}{dx} = c x^{c-1}$, welchen Wert auch c haben mag.

Beispiel.

$$y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}.$$

§ 16. Differentiation der elementaren transcendenten Funktionen.

a. Von der Exponentialfunktion $y = a^x$ ausgehend, erhalten wir

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a^{x+\triangle x} - a^x}{\triangle x} = a^x \frac{a^{\triangle x} - 1}{\triangle x}.$$

Nach § 8 Nr. 6 ist

$$\lim \frac{a^{\triangle x} - 1}{\triangle x}\Bigg|_{\triangle x = 0} = \frac{\log a}{\log e},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}. \tag{1}$$

Nimmt man hierin die Logarithmen für die Grundzahl e, so ist $\overset{e}{\log} e = 1$ und wird $\overset{e}{\log} a$ mit la bezeichnet. Man erhält daher als Ableitung der Exponentialfunktion

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = a^x la. \tag{1}$$

Setzt man schliesslich noch a = e gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist la = 1 und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x. \tag{2}$$

Satz. Die Exponentialgrösse e^x hat die Eigenschaft, gleich ihrer Ableitung zu sein.

b. Die logarithmische Funktion.

Ist $y = \overset{a}{\log} x$, so folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\overset{a}{\log}(x + \triangle x) - \overset{a}{\log} x}{\triangle x} = \frac{\overset{a}{\log} \frac{x + \triangle x}{x}}{\triangle x}$$

$$= \frac{1}{x} \overset{a}{\log}\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}.$$

Nach § 8 ist

$$\lim \frac{\log(1+z)}{z} = \lim \log(1+z)^{\frac{1}{z}} = \log e,$$

daher auch

$$\log\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^{\frac{x}{\triangle x}}\Bigg|_{\triangle x = 0} = \log e = \frac{1}{la}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\overset{a}{\log} e = \frac{1}{x\,la} = \frac{M_a}{x}. \tag{3}$$

Hieraus folgt für den natürlichen Logarithmus

$$y = lx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x}. \tag{4}$$

c. Die trigonometrischen Funktionen.

a) Aus $y = \sin x$ folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sin(x+\triangle x) - \sin x}{\triangle x} = \frac{\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}.$$

Nach § 10 ist

$$\lim \frac{\sin z}{z}\bigg|_{z=0} = 1 = \lim \frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}},$$

daher erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x. \tag{5}$$

β) Ist $y = \cos x$, so folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\cos(x+\triangle x) - \cos x}{\triangle x} = -\frac{\sin\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}$$

und ähnlich wie in α) beim Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x. \tag{6}$$

γ) Aus $y = \operatorname{tg} x$ folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\triangle x) - \operatorname{tg} x}{\triangle x} = \frac{\operatorname{tg}\triangle x}{\triangle x}[1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+\triangle x)].$$

Da nach § 10 $\lim \frac{\operatorname{tg}\triangle x}{\triangle x}\Big|_{\triangle x = 0} = 1$ ist, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{7}$$

δ) Ebenso ergiebt sich für $y = \cot x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\operatorname{ctg}(x+\triangle x) - \operatorname{ctg} x}{\triangle x}$$

$$= -\frac{\operatorname{tg}\triangle x}{\triangle x}[1 + \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}(x+\triangle x)],$$

oder, da $\lim \frac{\operatorname{tg}\triangle x}{\triangle x} = 1$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{8}$$

Satz. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x,$$

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

d. Die cyklometrischen Funktionen werden differentiiert, indem man sie umkehrt. Geht aus $y = f(x)$ die Gleichung $x = \varphi(y)$ hervor, so folgt

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f)}.$$

α) Ist $y = \arcsin x$, so erhält man hieraus durch Umkehrung $x = \sin y$ und durch Differentiation

$$dx = \cos y \, dy = \sqrt{1 - \sin^2 y} \, dy = \sqrt{1 - x^2} \, dy$$

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

β) Ist $y = \arccos x$, so findet man in derselben Weise

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d \arccos x}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und ebenso für

γ) $y = \operatorname{arc\,tg} x$

$$(11) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

und

δ) für $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{arc\,ctg} x}{dx} = - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Satz. Die Ableitungen der cyklometrischen Funktionen sind

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

§ 17. Ableitung zusammengesetzter Funktionen der Elementarfunktionen.

a. Ableitung einer Summe.

Ist

$$y = Au + Bv + Cw + \dots$$

gegeben, wo A, B, C, ... Konstante und u, v, w, ... Funktionen von x sein sollen, so ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A \frac{\triangle u}{\triangle x} + B \frac{\triangle v}{\triangle x} + C \frac{\triangle w}{\triangle x} + \dots$$

und somit

$$\frac{dy}{dx} = A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dx} + C \frac{dw}{dx} + \dots \tag{1}$$

Setzt man hierin $v = w = \dots = 0$, so erhält man als Ableitung von $y = Au$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d Au}{dx} = A \frac{du}{dx},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz. Konstante Faktoren dürfen bei der Ableitung (eines Ausdrucks in jedem Glied) vorgesetzt werden.

Beispiel.

$$y = 3x^2 - 7x + \frac{2}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = 6x - 7 - \frac{2}{x^2}.$$

b. Ableitung eines Produkts.

Aus $y = uv$ folgt

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u\frac{\triangle v}{\triangle x} + v\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u \triangle v}{\triangle x}.$$

Nach der Lehre vom Unendlichkleinen darf das letzte Glied vernachlässigt werden (§ 11, Nr. 5). Da dasselbe einen Bruch darstellt, dessen Zähler beim Übergang zur Grenze von höherer Ordnung unendlich klein wird als der Nenner. Wir erhalten daher als Ableitung des Produkts $y = uv$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = uv' + vu'.$$

Satz. Das Produkt zweier Funktionen wird abgeleitet, indem man jede Funktion mit der Ableitung der anderen multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Beispiel. $y = \sin x \cos x$.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \sin x + \cos x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x.$$

Für ein Produkt von drei Faktoren $y = uvw$ erhält man ebenso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{duvw}{dx} = vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}.$$

Beispiel. $y = (x + a)(x + b)(x + c)$.

$$\frac{dy}{dx} = (x + b)(x + c) + (x + c)(x + a) + (x + a)(x + b)$$
$$= 3x^2 + 2x(a + b + c) + (bc + ca + ab)$$
$$= \frac{d}{dx}\{x^3 + x^2(a + b + c) + x(bc + ca + ab) + abc\}.$$

c. Ableitung eines Quotienten.

$$y = \frac{u}{v} = uv^{-1}.$$

Man erhält als Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\frac{\triangle u}{\triangle x} - u\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v + \triangle v)}$$

und hieraus beim Übergang zur Grenze als Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Beispiel.

$$y = \frac{a + x}{a - x}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a - x)^2}(a - x + a + x) = \frac{2a}{(a - x)^2}.$$

Beispiel.

$$y = \operatorname{tg} x, \ \frac{dy}{dx} = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}\{\cos x \cos x + \sin x \sin x\} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

§ 18. Ableitung einer Funktion von einer Funktion.

Erklärung. Ist $y = f(z)$ eine Funktion von z und $z = \varphi(x)$ eine Funktion von x, so ist offenbar auch y eine Funktion von x; man sagt in diesem Falle, y sei eine Funktion von einer Funktion.

Lässt man y um $\triangle y$, z um $\triangle z$ und x um $\triangle x$ wachsen, so ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle x} = \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z} \cdot \frac{\triangle z}{\triangle x}$$

oder

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle z} \cdot \frac{\triangle z}{\triangle x},$$

und beim Übergange zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Satz. Ist $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dz}$ mal dem Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$.

Beispiel. $y = (a + bx)^n$. Man setze $y = z^n$, $z = a + bx$, so folgt

$$\frac{dy}{dz} = nz^{n-1} = n(a + bx)^{n-1},$$

$$\frac{dz}{dx} = b,$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = nz^{n-1} \cdot b = nb(a + bx)^{n-1}.$$

Beispiel. $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}$. Setze $y = \sqrt{z}$, $z = x^3 - 3x^2 + 2x$, so folgt

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 - 6x + 2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x + 2}{2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}}.$$

Übungsbeispiele.

1. $y = (a^2 + x^2)^3$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 6x(a^2 + x^2)^2$

2. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

3. $y = e^{ax+b}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = ae^{ax+b}$

4. $y = l(x+a)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+a}$

5. $y = l\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{a^2 - x^2}$

6. $y = \frac{1}{2ai} l \frac{x - ai}{x + ai}$, $i = \sqrt{-1}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + a^2}$

7. $y = lf(x)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

8. $y = l\,\mathrm{tg}\,x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin 2x}$

9. $y = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 + x^2}.$

§ 19. Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Sind x und y Funktionen einer dritten Veränderlichen t (Parameter), so könnte man hieraus durch Elimination von t eine Gleichung $y = f(x)$ finden und mit Hilfe derselben $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ermitteln.

Dazu ist jedoch die Elimination von t nicht nötig; es ist im Gegenteil in vielen Fällen zweckmässiger, dieselbe zu unterlassen und den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ebenfalls in Funktion von t anzugeben. Man erhält als Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle t} : \frac{\triangle x}{\triangle t}, \tag{1}$$

woraus sich beim Übergang zur Grenze für $\triangle x = \triangle y = \triangle t = 0$ der Differentialquotient ergiebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2}$$

Durch Elimination von t aus dieser Gleichung und der gegebenen $x = \varphi(t)$ lässt sich y' wieder in Funktion von x ausdrücken.

Beispiel. Setzt man in der Ellipsengleichung (Fig. 4)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad x = a \cos t,$$

so folgt

$$y = b \sin t.$$

Die Ellipse ist also auch dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t = -\frac{ay}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t = \frac{bx}{a},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Übungsbeispiele.

1. $\begin{cases} x = a(1 - t) \\ y = at \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = -1.$

2. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{ctg} 2t.$

3. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} \varphi \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 \varphi} \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{tg} \varphi.$

§ 20. Ableitung zusammengesetzter Funktionen von x.

1. Partielle Ableitungen.

Die Ableitung der Funktion $y = f(u, v)$ nach x zu bilden, wo u und v Funktionen von x und y sein sollen.

Verändern sich die Grössen u und v um $\triangle u$ und $\triangle v$, wenn x in $x + \triangle x$, y in $y + \triangle y$ übergeht, so erhält man als Differenzenquotient den Ausdruck

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle x}.$$

Bevor wir jedoch hieraus die Ableitung selbst bilden können, muss derselbe umgeformt werden. Addiert und

subtrahiert man rechts $\frac{f(u, v + \triangle v)}{\triangle x}$, so lässt sich dieser auch schreiben

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(u + \triangle u, v + \triangle v) - f(u, v + \triangle v)}{\triangle u} \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{f(u, v + \triangle v) - f(u, v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}.$$

Beim Übergang zur Grenze stellt nun augenscheinlich der erste Ausdruck rechts nichts anderes als die Ableitung der Funktion f (u, v) nach u allein dar, sofern bei dieser Operation doch v (oder $v + \triangle v$) gar nicht in Betracht kommt, also keine Änderung erleidet. Letztere Grösse kann also während dieses Vorganges als unveränderlich oder konstant angesehen werden.

Erklärung. Eine derartige Ableitung einer Funktion von mehreren Veränderlichen nach einer einzigen unter ihnen, wenn die anderen als konstant betrachtet werden, nennt man eine partielle Ableitung nach dieser Veränderlichen und bezeichnet die hierbei auftretenden Differentiale zum Unterschied von den gewöhnlichen mit einem geschwungenen ∂.

Die partielle Ableitung des eben besprochenen Ausdrucks wird demnach mit $\frac{\partial f}{\partial u}$ zu bezeichnen sein. Ebenso wird einleuchten, dass auch der zweite Ausdruck rechts bei konstant bleibendem u mit $\triangle v = 0$ in die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ von f (u, v) nach v übergeht. Daher ergiebt sich der

Satz. Die Ableitung der Funktion $y = f(u, v)$ ist dargestellt durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Zusatz. Sind in der Funktion f mehrere Funktionen u, v, w, ... von x enthalten, so ist allgemein die Ableitung von $y = f(u, v, w, \ldots)$ angegeben durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots$$

Beispiele.

1. Aus $y = f(u, v) = Au + Bv$ folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = A,\ \frac{\partial f}{\partial v} = B \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx}.$$

2. Ist $y = f = uv$, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v,\ \frac{\partial f}{\partial v} = u \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

3. Für $y = f(u, v) = \frac{u}{v}$ erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v^{-1},\ \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = v^{-1}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right).$$

4. Aus $y = u^v$ folgt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = vu^{v-1},\ \frac{\partial f}{\partial v} = u^v lu,$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v lu\frac{dv}{dx}.$$

§ 21. Ableitung nicht entwickelter Funktionen.

In den Funktionen, die bis jetzt abgeleitet worden sind, ist y stets als entwickelte Funktion von x er-

schienen $y = f(x)$. Es kann aber auch vorkommen, dass y in nicht entwickelter Gestalt durch eine Gleichung von der Form $f(xy) = 0$ mit x verbunden ist, die vielleicht nicht nach y aufgelöst werden kann. Es fragt sich, wie in diesem Fall die Ableitung y' zu ermitteln ist.

Um dieselbe zu erhalten, nehmen wir an $z = f(uv)$ sei eine Funktion der Veränderlichen u und v, dann ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Setzt man hier ein $z = 0$, $u = x$, $v = y$, so folgt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und hieraus, weil $\frac{dx}{dx} = 1$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \tag{1}$$

woraus als gesuchte Ableitung folgt

$$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2}$$

Beispiel.

$$f(xy) \equiv e^y lx - y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y lx - 1$$

$$y' = -\frac{e^y}{(e^y lx - 1)x}.$$

Erklärung. „Die Gleichung $f(xy) = 0$ differentiieren" heisst die Operation (1) auf dieselbe anwenden.

Nach einiger Übung differentiiert man der Reihe nach jedes Glied von $f(xy) = 0$ nach dieser Formel und löst die erhaltene Gleichung nachträglich nach y' auf.

Beispiel.

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2ay = 0.$$

Indem man gliedweise differentiiert, folgt

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' - 2ay' = 0$$

und hieraus

$$y' = \frac{x + y}{a - x + y}.$$

Beispiele.

1. $f = x^2 + y^2 - a^2 = 0,$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2. $f = x^3 - y^2 = 0,$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,\ y' = \frac{3}{2}\frac{x^2}{y}.$$

3. $f = y^2 - 2px = 0,$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2p,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ y' = \frac{p}{y} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

§ 22. Die logarithmische Differentiation.

Anstatt aus $y = f(x)$ die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ direkt zu bilden, ist es häufig zweckmässig, zunächst beiderseits den natürlichen Logarithmus zu nehmen und diesen zu differentiieren. Diese Operation heisst die „loga-

rithmische Differentiation". Sie wird insbesondere dann mit Vorteil angewendet, wenn

$$f(x) = uvw \ldots$$

ein Produkt von mehreren Faktoren darstellt.

Ist also $y = uvw \ldots$, wo $u, v, w, \ldots$ Funktionen von x sind, so erhält man

$$ly = lu + lv + lw + \ldots$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \ldots$$

Auch alle Funktionen von der Form $y = u^v$ werden mit Vorteil in dieser Weise behandelt. Man erhält hieraus durch Logarithmieren

$$ly = v\,lu$$

und indem man diese Gleichung differentiiert

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}\frac{du}{dx} + lu\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v lu\frac{dv}{dx}.$$

Beispiele.

1. Ist $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = x(a-x)^{\frac{1}{2}}(a+x)^{-\frac{1}{2}}$,

so folgt

$$ly = lx + \frac{1}{2}l(a-x) - \frac{1}{2}l(a+x)$$

und hieraus durch Ableitung nach x

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(a-x)} - \frac{1}{2(a+x)} = \frac{a^2 - ax - x^2}{x(a^2 - x^2)}$$

$$y' = \frac{a^2 - ax - x^2}{(a+x)(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. $y = x^x, \quad \frac{dy}{dx} = x^x(1 + lx),$

3. Bilde ebenso die Ableitung von

$$y = (e^x + 1)^{\sin x}, \quad y = \sin x^x,$$
$$y = x^{lx}, \quad y = x^{\sin x}.$$

§ 23. Funktionen zweier oder mehrerer unabhängigen Veränderlichen. Totales Differential.

Erklärung. Sind x und y zwei voneinander unabhängige Veränderliche, die mit einer neuen Veränderlichen z durch die Gleichung verbunden sind

$$z = f(xy),$$

so heisst z eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und y.

Versteht man unter xyz die Koordinaten eines Punktes im Raum bezogen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, so stellt $z = f(xy)$ die Gleichung einer räumlichen Fläche dar.

Lässt man in $z = f(xy)$ die Veränderlichen x und y um $\triangle x$ und $\triangle y$ und z um $\triangle z$ zunehmen, so folgt

$$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(xy)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $y + \triangle y = c$ setzen,

$$\triangle z = \frac{f(x + \triangle x, c) - f(x, c)}{\triangle x} \triangle x + \frac{f(x, y + \triangle y) - fxy)}{\triangle y} \triangle y.$$

Beim Übergang zur Grenze gehen die Quotienten rechts offenbar in die partiellen Ableitungen der Funktion f nach x, bezw. y über; wir erhalten also

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Man nennt alsdann dz das **totale Differential** der Funktion z.

Erklärung. Das totale Differential der Funktion $z = f(xy)$ heisst die Summe

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

der partiellen Ableitungen in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen x und y.

Ist $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so wird die Summe

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

ebenfalls als totales Differential von f bezeichnet.

Sind hierin $x_1 = \psi_1(x)$, $x_2 = \psi_2(x)$, ..., $x_n = \psi_n(x)$ Funktionen einer Veränderlichen x, so ist auch $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Funktion von x, deren Ableitung sich nach der Formel berechnet:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx}.$$

III. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

§ 24. Höhere Ableitungen entwickelter Funktionen.

Die aus $y = f(x)$ hervorgehende Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x und kann deshalb ebenfalls nach x abgeleitet werden, d. h. man kann bilden

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{df'(x)}{dx}.$$

Man schreibt hierfür

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

und ebenso

$$\frac{dy''}{dx} = \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \text{ etc.}$$

Erklärung. Man nennt

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x), \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x), \ldots,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

den ersten, zweiten, ..., n^{ten} Differentialquotienten von $y = f(x)$ und $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ die erste, zweite, ... n^{te} Ableitung von $f(x)$.

Beispiele.

1. Ist n eine positive ganze Zahl, so erhält man aus

$$y = x^n,\ y' = nx^{n-1},\ y'' = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$$
$$y^{(i)} = n(n-1)\ldots(n-i+1)x^{n-i}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n(x^n)}{dx^n} = (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Satz. Für die Potenz x^n werden alle höheren Ableitungen nach der n^{ten} gleich Null, vorausgesetzt, dass n eine ganze positive Zahl ist.

Ist n keine ganze Zahl oder negativ, so wird auch keine Ableitung konstant oder gleich Null.

Hieraus ergiebt sich der weitere

Satz. Die n^{te} Ableitung einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ist konstant $y^{(n)} = n!\,a_n$. Alle höheren Ableitungen sind gleich Null.

2. $$y = lx,\quad y' = \frac{1}{x},\quad y'' = -\frac{1}{x^2},\quad y''' = \frac{2}{x^3}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n lx}{x^n} = \frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

3. Ist $y = a^x$, bezw. $y = e^x$,

so ergiebt sich nach § 16

$$y' = a^x\, la,\quad y'' = a^x (la)^2, \ldots$$

bezw.

$$y' = e^x = y'' = y''' = \ldots,$$

somit allgemein

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x (la)^n,\quad \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

Satz. Sämtliche Ableitungen der Funktion e^x sind einander gleich und gleich der ursprünglichen Funktion.

4. Aus $y = \sin x$ folgt

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x,$$
$$y^{(4)} = \sin x, \ldots$$

Hieraus fliesst der

Satz. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ wiederholen sich, sie sind periodisch. Man erhält allgemein

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Übungsbeispiele.

Die zweite Ableitung von folgenden Funktionen zu bilden:

1. $y = \sqrt{2px}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2x\sqrt{2px}}$

2. $y = x + \frac{a^2}{x^2}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6a^2}{x^4}$

3. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

4. $y = e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}$

5. $y = \sin(\alpha - x)$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(\alpha - x) = -y$

6. $y = x\, l(x + 1)$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x + 2}{x + 1^2}.$

§ 25. Höhere Ableitungen zusammengesetzter Funktionen von x.

1. Sind u, v, w, ... Funktionen von x, deren Ableitungen unmittelbar entwickelt werden können und A, B, C, ... konstante Grössen, so folgt aus

$$y = Au + Bv + Cw + \ldots,$$
$$y' = Au' + Bv' + Cw' + \ldots,$$
$$y'' = Au'' + Bv'' + Cw'' + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = Au^{(n)} + Bv^{(n)} + Cw^{(n)} + \ldots$$

Beispiel.

$$y = e^x + \frac{1}{e^x}, \quad y' = e^x - \frac{1}{e^x}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = e^x + \frac{(-1)^n}{e^x}.$$

2. Sind u und v Faktoren eines Produktes, so erhält man aus

$$y = uv$$
$$y' = u'v + uv'$$
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)},$$

wo $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$ die bekannten Binominalkoeffizienten bedeuten.

Die in dieser Formel enthaltene Regel heisst der Satz von Leibniz.

§ 26. Höhere Differenzen- und Differentialquotienten.

Betrachtet man in dem Differenzenquotienten von $y = f(x)$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x}\{f(x + \triangle x) - f(x)\} = f_1(x)$$

$\triangle x$ als eine konstante Grösse und bildet man von diesem wieder für die gleiche Änderung $\triangle x$ den Differenzenquotienten, so heisst derselbe Differenzenquotient zweiter Ordnung oder kurz der zweite Differenzenquotient und hat die Form

$$\frac{1}{\triangle x}\{f_1(x + \triangle x) - f_1(x)\} = \frac{1}{\triangle x^2}\{f(x + 2\triangle x) - 2f(x + \triangle x) + f(x)\} = f_2(x).$$

Ebenso kann man hieraus den Differenzenquotienten dritter Ordnung bilden:

$$\frac{1}{\triangle x^3}\{f(x+3\triangle x) - 3f(x+2\triangle x) + 3f(x+\triangle x) - f(x)\} = f_3(x) \text{ etc.}$$

Erklärung. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\triangle x^n}\left\{f(x + n\triangle x) - \binom{n}{1}f(x + (n-1)\triangle x) + \binom{n}{2}f(x + (n-2)\triangle x) - \ldots + (-1)^n f(x)\right\} \tag{1}$$

heisst der „n^{te} Differenzenquotient". Der Zähler desselben wird als „Differenz n^{ter} Ordnung" oder als „n^{te} Differenz" bezeichnet und durch das Zeichen $\triangle^n y = \triangle^n f(x)$ festgesetzt.

Demnach kann man auch sagen:

Der n^{te} Differenzenquotient $f_n(x)$ der Funktion $f(x)$ stellt sich als Quotient der n^{ten} Differenz der Funktion und der n^{ten} Potenz von $\triangle x$ dar.

$$(2) \qquad f_n(x) = \frac{\triangle^n y}{\triangle x^n} = \frac{\triangle^n f(x)}{\triangle x^n}.$$

Erklärung. Nähert sich hierbei $\triangle x$ mehr und mehr der Grenze Null, ohne diese zu erreichen, so schreibt man nach dem Vorgang in § 13 dx statt $\triangle x$ und nennt dx das Differential von x. Analog bezeichnet man $\triangle^n y$ mit $d^n y$ und nennt diese Grösse das n^{te} Differential der Funktion.

Erklärung. Der Grenzwert $\lim\limits_{\triangle x=0} \frac{\triangle^n y}{\triangle x^n}$ heisst der n^{te} Differentialquotient und wird angegeben durch

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle^n y}{\triangle x^n}.$$

Es gilt nun der

Satz. Der n^{te} Differentialquotient ist gleich der n^{ten} Ableitung

$$(4) \qquad \lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle^n y}{\triangle x^n} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Um dies zu beweisen, benutzen wir die in § 14, 2 aufgestellte Beziehung

$$f(x + \triangle x) - f(x) = \triangle x f'(x + \vartheta \triangle x), \; 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

welche gültig ist, solange $f(x)$ innerhalb des Gebietes von x bis $x + \triangle x$ eindeutig und stetig ist.

Damit geht der erste Differenzenquotient über in

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x}\{f(x + \triangle x) - f(x)\} = f'(x + \vartheta \triangle x)$$

und erhält der zweite Differenzenquotient die Gestalt

$$\frac{\triangle^2 y}{\triangle x^2} = \frac{1}{\triangle x}\{f'(x + \vartheta \triangle x + \triangle x) - f'(x + \vartheta \triangle x)\},$$

der mit Hilfe derselben Beziehung sich darstellen lässt durch

$$\frac{\triangle^2 y}{\triangle x^2} = f''(x + \vartheta \triangle x + \vartheta_1 \triangle x).$$

In derselben Weise erhält man

$$\frac{\triangle^3 y}{\triangle x^3} = f'''(x + \vartheta \triangle x + \vartheta_1 \triangle x + \vartheta_2 \triangle x)$$

. . . .

. . . .

Allgemein gilt schliesslich

$$\frac{\triangle^n y}{\triangle x^n} = f^{(n)}\{x + \triangle x(\vartheta + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1})\},$$

wo ϑ, ϑ_1, ..., ϑ_{n-1} lauter Zahlen bedeuten, die sämtlich grösser als Null und kleiner als 1 sind.

Mit $\triangle x = 0$ geht die letzte Gleichung unmittelbar in die Beziehung (4) über, womit der Satz bewiesen ist.

§ 27. Höhere partielle Ableitungen.

Erklärung. Ist $f(xy)$ eine Funktion zweier Veränderlichen x und y, so heissen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ die

partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion f nach x bezw. y. Diese sind selbst wieder Funktionen von x und y und können deshalb selbst wieder partiell nach x und y abgeleitet werden. Man bezeichnet die Ableitungen

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}, \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

als partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Werden auch diese wieder partiell nach x und y abgeleitet, so erhält man die partiellen Ableitungen dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \text{ etc.}$$

Für die einfachen Funktionen gilt der

Satz. Wird eine Funktion f(xy) mehrfach nach den beiden Veränderlichen x und y partiell abgeleitet, so ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

Um z. B. die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y}$ der Funktion $y = f(xy) = x^5 y^2 + y^3 x$ zu berechnen, kann man entweder zuerst zweimal partiell nach x und dann nach y oder zuerst nach y und dann zweimal nach x ableiten; das Resultat ist das nämliche

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \, \partial x^2} = 40 x^3 y.$$

Zu beweisen, dass für ein Gebiet, in welchem $z = f(xy)$ eine endliche und stetige Funktion darstellt, stets die Gleichung gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Betrachtet man in $z = f(xy)$ die Veränderliche y als konstant, so ergiebt sich für den ersten Differenzenquotienten der Ausdruck

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x}\{f(x + \triangle x,\ y) - f(xy)\} = f_1(xy).$$

Sieht man nun hierin x und $\triangle x$ als konstant an und lässt man y um $\triangle y$ zunehmen, so folgt als zweiter Differenzenquotient

$$\frac{\triangle^2 z}{\triangle y \triangle x} = \frac{1}{\triangle y \triangle x}\{f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x + \triangle x, y) - f(x, y + \triangle y) + f(x, y)\},$$

der offenbar ungeändert bleibt, wenn man x mit y und gleichzeitig $\triangle x$ mit $\triangle y$ vertauscht; daher ist auch

$$\frac{\triangle^2 z}{\triangle y \triangle x} = \frac{\triangle^2 z}{\triangle x \triangle y}$$

und, wenn man zur Grenze übergeht, auch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

was zu beweisen war.

Einen Beweis dieses Satzes liefert jedes spezielle Beispiel. Ist z. B.

$$f(x, y) = ax^3 y + bxy^2 + cxy,$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2y + by^2 + cy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ax^3 + 2bxy + cx,$$

somit ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 3ax^2 + 2by + c = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}.$$

Beispiel. Die partiellen Ableitungen der Funktion $f = y^2(2a - x) - 4a^2x$ zu bilden. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 - 4a^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2a - x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4a - 2x.$$

§ 28. Höhere Ableitungen nicht entwickelter Funktionen.

Sind die Veränderlichen x und y miteinander durch die Gleichung $f(xy) = 0$ verbunden, so berechnet sich nach § 21 die Ableitung y' aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \tag{1}$$

wo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ auch als nicht entwickelte Funktionen von x und y zu betrachten sind, während y' als **Funktion von x allein** zu denken ist. Setzt man daher die linke Seite obiger Gleichung gleich $f_1(x, y)$, so ist ebenso

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' = 0.$$

Nun ist unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 0$$

ist,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

und

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'.$$

Setzt man diese Ausdrücke oben ein, so folgt

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich y' und y'' berechnen.

Erklärung. Man nennt die Gleichungen (1) und (2) auch die einmal, zweimal differentiierte Gleichung $f(x, y) = 0$.

Hiernach ergiebt sich folgende

Regel. Um die n^te Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$ aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ zu berechnen, differentiiere man dieselbe n-mal durch, dann ergeben sich n Gleichungen, aus denen sich der Reihe nach $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ermitteln lassen.

Beispiele. 1. Aus der Gleichung die zweite Ableitung y'' zu berechnen:

$$f = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Durch zweimalige Differentiation ergeben sich die Gleichungen

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0,$$
$$2+2y'^2+2(y-b)y''=0,$$

aus denen y' und y'' einfach zu berechnen sind

$$y'=-\frac{x-a}{y-b},\quad y''=-\frac{r^2}{(y-b)^3}.$$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,\quad \frac{2}{a^2}+\frac{2y'^2}{b^2}+\frac{2yy''}{b^2}=0,$$

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

3. Ist $y^2-2px=0$, so folgt

$$2yy'-2p=0 \quad \text{oder} \quad yy'-p=0,$$
$$y'^2+yy''=0;$$

somit ist

$$y'=\frac{p}{y},\quad y''=-\frac{p^2}{y^3}.$$

§ 29. Höhere totale Differentiale.

Erklärung. Betrachtet man in $z=f(xy)\,x$ und y zugleich als unabhängige Veränderliche, so ist nach § 23 das totale Differential dieser Funktion angegeben durch

$$(1)\qquad dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Sieht man dasselbe als Funktion von x und y allein an, wo dx und dy als Konstante aufzufassen sind und berechnet das zu der Funktion dz gehörige

totale Differential für dieselben Differentiale dx und dy, so erhält man das totale Differential zweiter Ordnung $d(dz) = d^2 z$ und hieraus das totale Differential dritter Ordnung etc.

Wendet man die Formel (1) auf sich selbst an, so folgt

$$d^2 z = \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy. \tag{2}$$

Da nun der Annahme gemäss die Differentiale dx und dy der unabhängigen Veränderlichen x und y als konstant zu denken sind, so ist

$$\frac{\partial (dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dy,$$

$$\frac{\partial (dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy.$$

Indem wir diese Werte in die Gleichung (2) substituieren, erhalten wir

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Auf dem gleichen Wege ergiebt sich

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y^2} dx \, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 \text{ etc.}$$

Es gilt somit der

Satz. Das zu dx und dy gehörige totale Differential der n^{ten} Ordnung ist

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n,$$

wo $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ die bekannten Binomialkoeffizienten sind.

Beispiel. Aus $z = ax^2 + bxy + cy^2$ folgt

$$dz = (2ax + by) dx + (bx + 2cy) dy$$

$$d^2 z = 2a dx^2 + 2b dx dy + 2c dy^2$$

$$d^3 z = 0 \ldots$$

§ 30. Begriff der Differentialgleichung.

Ist in der Gleichung

$$f(xy, c) = 0 \tag{1}$$

eine willkürliche Konstante c enthalten, so erhält man hieraus durch Differentiation nach x

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \tag{2}$$

und wenn wir aus (1) und (2) die Konstante c eliminieren, so ergiebt sich die Gleichung

$$\varphi(xy, y') = 0 \tag{3}$$

zwischen den Veränderlichen x, y und der Ableitung y'.

Erklärung. Die durch Elimination von c aus (1) und (2) hervorgehende Gleichung (3), welche ganz unabhängig von c ist, heisst Differentialgleichung der gegebenen oder ursprünglichen Gleichung (1).

Denkt man sich in der Gleichung (1) der willkürlichen Konstanten c alle möglichen Werte $c_1, c_2, c_3, \ldots$

beigelegt, so entspricht im Sinne der Geometrie jedem Wert c_k von c eine ebene Kurve f von der Gleichung

$$f(x y c_k) = 0.$$

Die Gleichung (1) repräsentiert daher ein System von ebenen Kurven, welche eine gemeinschaftliche

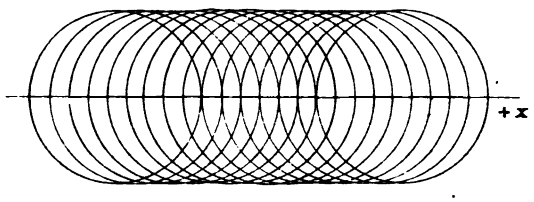


Fig 23.

Eigenschaft der Tangente besitzen, die durch die Gleichung (3) ausgedrückt ist.

Beispiel. Ist in der Kreisgleichung

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2$$

c willkürlich, so ergiebt sich hieraus durch Differentiation nach x

$$(x - c) + y y' = 0$$

und durch Elimination von c aus beiden Gleichungen

$$y^2(y'^2 + 1) - r^2 = 0,$$

welche als Differentialgleichung einer Schar von Kreisen vom Radius r anzusehen ist, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt (s. Fig. 23).

IV. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittelung der Grenzwerte unbestimmter Formen.

§ 31. Die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Wie schon früher § 7, 4 angedeutet worden, kann es vorkommen, dass eine Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für einen gewissen Wert von $x = a$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftritt. Dies ist der Fall, wenn für $x = a$ sowohl $f(a) = 0$ als auch $\varphi(a) = 0$ ist. Dass aber trotzdem der Wert von x ein ganz bestimmter werden kann, zeigt das einfache Beispiel

$$F(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

Diese Funktion wird für $x = a$ unbestimmt $F(a) = \frac{0}{0}$. Dividiert man aber Zähler und Nenner mit $x - a$ durch, so geht $F(x)$ über in

$$F(x) = x^2 + ax + a^2,$$

woraus sich für $x = a$ der bestimmte Wert ergiebt

$$F(a) = 3a^2.$$

Der Grund der Unbestimmtheit von $F(x)$ für $x = a$ ist also darin zu suchen, dass Zähler und Nenner infolge des gemeinsamen Faktors $(x - a)$ zu Null gemacht werden.

Die Methode des Differentiierens liefert nun ein einfaches Mittel, diesen gemeinsamen Faktor herauszuschaffen und den wahren Wert von $F(x)$ zu bestimmen.

Die Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ erscheint für $x = a$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, wenn $f(a) = 0$ und $\varphi(a) = 0$ sind. Multipliziert man in obiger Gleichung mit $\varphi(x)$ durch, so folgt

$$F(x)\,\varphi(x) = f(x)$$

und hieraus durch Differentiation nach x

$$F'(x)\,\varphi(x) + F(x)\,\varphi'(x) = f'(x).$$

Da nun der Annahme gemäss $\varphi(a) = 0$ ist, so fällt für $x = a$ das erste Glied links weg und geht die Gleichung über in

$$F(a)\,\varphi'(a) = f'(a),$$

woraus folgt

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Wenn nun $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ für $x = a$ nicht wieder gleich Null oder wenigstens nicht beide zugleich Null werden, so giebt dieser Ausdruck den gesuchten wahren Wert von $F(x)$ an.

Ist aber auch $f'(a) = 0$ und $\varphi'(a) = 0$, so differentiiere man obige Gleichung weiter nach x, dann folgt

$$F''(x)\,\varphi(x) + 2\,F'(x)\,\varphi'(x) + F(x)\,\varphi''(x) = f''(x).$$

Da nun hierin $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ für $x = a$ verschwinden,

so ergiebt sich als wahrer Wert von $F(x)$ für $x = a$

$$F(a) = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)} \text{ etc.}$$

Es gilt deshalb der

Satz. Werden Zähler und Nenner des Bruches $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ samt ihren $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen für $x = a$ gleichzeitig 0, während die n^{ten} Ableitungen $f^{(n)}(x)$ und $\varphi^{(n)}(x)$ für diesen Wert wenigstens nicht beide verschwinden, so ist der wahre Wert von $F(x)$ angegeben durch

$$F(a) = \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left.\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}\right|_{x=a}.$$

Beispiele.

1. $$F(x) = \left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0} = \frac{0}{0} = \left.\frac{\cos x}{1}\right|_{x=0} = 1$$

$$F(0) = 1.$$

2. $$F(x) = \left.\frac{x^n - a^n}{x - a}\right|_{x=0} = \frac{0}{0} = \left.\frac{n x^{n-1}}{1}\right|_{x=a} = n a^{n-1}$$

$$F(a) = n a^{n-1}.$$

3. $$F(x) = \left.\frac{a^x - 1}{x}\right|_{x=0} = \frac{0}{0} = \left.\frac{a^x \, la}{1}\right|_{x=0} = la$$

$$F(0) = la.$$

4. $$F(x) = \frac{\sin mx}{\sin nx} \qquad F(0) = \frac{m}{n}.$$

5. $F(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ $F(0) = 1$.

6. $F(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $F(0) = \frac{1}{2}$.

7. $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ $F(0) = 2$.

8. $F(x) = \frac{a^x - e^x}{x}$ $F(0) = la - 1$.

9. $F(x) = \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos x}$ $F(0) = 2$.

10. $F(x) = \frac{x^2 (2 \cos x - 1)}{2 (1 - \cos x)}$ $F(0) = 1$.

§ 32. Die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Erklärung. Nimmt die Funktion

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{1}$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so versteht man auch hier unter dem wahren Wert derselben den Grenzwert, nach welchem sie für $x = a$ konvergiert.

Setzt man

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \tag{2}$$

so geht der neue Bruch für $x = a$ in die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ über, deren wahrer Wert daher nach § 31 ermittelt werden kann.

Es ist

$$(3) \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{-\frac{\varphi'}{\varphi^2}}{-\frac{f'}{f^2}} = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^2.$$

Nimmt nun die Funktion $F(x)$ für $x = a$ den wahren Wert $A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}$ an, so ist mit Hilfe von (2) und (3)

$$(4) \qquad A = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} A^2 \quad \text{oder} \quad A = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Die letzte Gleichung giebt zu erkennen, dass der wahre Wert von $F(x)$ auf dieselbe Weise gefunden wird, wie derjenige der betreffenden Funktionen in § 31.

Satz. Werden Zähler und Nenner $f(x)$ und $\varphi(x)$ der Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ samt ihren $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen für $x = a$ gleichzeitig unendlich gross, während es $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ wenigstens nicht beide zugleich werden, so ist der wahre Wert von $F(a)$ angegeben durch

$$F(a) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^n(a)}.$$

Beispiele.

1. $$F(x) = \left.\frac{l(x-a)}{l(e^x - e^a)}\right|_{x=a} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x - e^a}}$$

$$= \left.\frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)}\right|_{x=a} = \frac{0}{0}$$

$$= \left.\frac{e^x}{e^x(x-a) + e^x}\right|_{x=a} = 1 \qquad F(a) = 1.$$

2. $$F(x) = \left.\frac{lx}{l \sin x}\right|_{x=0} = \frac{\infty}{\infty} = \ldots = 1 \qquad F(0) = 1.$$

3. $$F(x) = \frac{lx}{x^n} \qquad F(\infty) = 0.$$

4. $$F(x) = \frac{e^x}{x^n} \qquad F(\infty) = \infty.$$

§ 33. Die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$.

Wird in dem Produkt $F(x) = f(x)\,\varphi(x)$ für $x = a$ der eine Faktor $f(a) = 0$ und der andere $\varphi(a) = \infty$, so erscheint $F(a)$ in der Form $F(a) = 0 \cdot \infty$.

In diesem Fall setze man

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{oder} \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)},$$

dann ergiebt sich für $x = a$ entweder die Gestalt

$$F(a) = \frac{0}{0} \text{ oder } = \frac{\infty}{\infty},$$

die nach § 31 oder § 32 zu behandeln ist.

Beispiele.

1. $F(x) = \sin x \, l x$ $\qquad F(0) = 0.$
2. $F(x) = x^n l x$ $\qquad F(0) = 0.$
3. $F(x) = l(1 - \sin x) \operatorname{ctg} x$ $\qquad F(0) = -1.$
4. $F(x) = (x + a) \, l\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ $\qquad F(\infty) = a.$

§ 34. Die unbestimmte Form $\infty - \infty$.

Werden in $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = a$ beide ∞, so erscheint $F(x)$ in der Form $\infty - \infty$. In diesem Falle setze man

$$F(x) = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x) - f_1(x)}{f_1(x)\varphi_1(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi(x)}}.$$

Dann erscheint $F(x)$ für $x = a$ wieder unter der Gestalt $\frac{0}{0}$, die nach § 31 zu behandeln ist.

Beispiele.

1. $F(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ $\qquad F(0) = 0.$
2. $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ $\qquad F(0) = \frac{1}{2}.$
3. $F(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{l(x - 1)}$ $\qquad F(2) = -\frac{1}{2}.$

§ 35. Die unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, 1^∞.

Nimmt endlich die Funktion $F(x) = f(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0 oder 1^∞ an, so setze man

$$l\,f(x) = f_1(x), \quad l\,F(x) = \psi(x),$$

dann erscheint die Funktion $\psi(x)$ in der Form

$$\psi(x) = l\,F(x) = \varphi(x)\,f_1(x) = \varphi(x)\,l\,f(x)$$

in allen drei Fällen für $x = a$ in der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$, so dass $\psi(x)$ und damit auch $F(x)$ nach § 33 weiter behandelt werden kann.

Beispiele.

1. $F(x) = (x - a)^{x-a}\Big|_{x=a} = 0^0 \qquad F(a) = 1.$

2. $F(x) = x^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=0} = 0^\infty \qquad F(0) = 1.$

3. $F(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a}\Big|_{x=\infty} = 1^\infty \qquad F(\infty) = e^a.$

4. $F(x) = (1 + mx)^{\frac{1}{x}}\Big|_{x=0} = 1^\infty \qquad F(0) = e^m.$

V. Abschnitt.

Konvergenz und Divergenz der Reihen.

---

§ 36. Erklärungen.

1. Erklärung. Eine Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

heisst konvergent, wenn es einen gewissen endlichen

Wert S giebt. dem die Summe der n ersten Glieder

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

bei wachsendem n immer mehr zustrebt. Diese Grenze S heisst dann die Summe der Reihe. Die Differenz

$$S - S_n = R_n$$

heisst der Rest der Reihe von der n^{ten} Stelle ab.

Beispiel. Eine konvergente Reihe haben wir beispielsweise in der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

denn für dieselben ist

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

also

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = 2.$$

Der Rest dieser Reihe von der n^{ten} Stelle ab ist

$$R_n = 2 - \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

der für $n = \infty$ verschwindet.

2. Erklärung. Eine Reihe oscilliert und kann deshalb auch nicht als konvergent angesehen werden, wenn sich die Summe der n ersten Glieder verschiedenen Werten nähert. Eine solche Reihe ist beispielsweise die folgende

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1},$$

die für ein ungerades bezw. gerades n den Wert 1 bezw. 0 erhält.

3. Erklärung. Eine Reihe divergiert, wenn die Summe der n ersten Glieder bei wachsendem n immer grössere Werte annimmt.

Ein Beispiel hierfür bietet die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

§ 37. Konvergenz der Reihen mit positiven Gliedern.

1. Es lässt sich zunächst der Satz beweisen.

Satz. Eine Reihe, deren Glieder mehr und mehr zunehmen, ist divergent.

Es sei

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

die gegebene Reihe und

$$u_n > u_{n-1} > u_{n-2} > \dots > u_2 > u_1,$$

dann ist auch

$$u_2 > u_1, \quad u_3 > u_1, \quad \dots \quad u_n > u_1,$$

somit auch

$$\sum_2^n u_2 + u_1 > (n - 1) u_1 + u_1$$

oder

$$S_n > n u_1 \big|_{n=\infty} = \infty.$$

Die erste Hauptbedingung für die Konvergenz einer Reihe ist somit enthalten in dem

Satz. Die Glieder jeder konvergenten Reihe müssen unbegrenzt abnehmen. Für eine solche muss stets die Bedingung erfüllt sein

$$\lim u_n \big|_{n=\infty} = 0. \tag{1}$$

Diese Bedingung ist wohl notwendig für die Konvergenz einer Reihe; allein sie ist nicht ausreichend, wie folgende Beispiele zeigen.

Für die harmonische Reihe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n},$$

sowie die folgende

$$S_n = \frac{1}{\sqrt[k]{1}} + \frac{1}{\sqrt[k]{2}} + \frac{1}{\sqrt[k]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[k]{n}},$$

wo k eine ganze positive Zahl sein soll, ist die Bedingung (1) erfüllt. Die Reihen sind aber divergent, wie leicht gezeigt werden kann. Für die erste dieser Reihen hat man

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

somit ist

$$S_n > \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots > \frac{n}{2}\Bigg|_{n=\infty} = \infty.$$

Geht man bei der zweiten Reihe bis zum n^{ten} Glied, so ist offenbar die Summe derselben grösser als die Reihe, in welcher alle Glieder gleich $\frac{1}{\sqrt[k]{n}}$ gesetzt werden, daher ist

$$S_n > \frac{n}{\sqrt[k]{n}} > \sqrt[k]{n^{k-1}}\Big|_{n=\infty} = \infty.$$

2. Satz. Die geometrische Reihe

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

ist konvergent für $x < 1$ und divergent für $x \geqq 1$, denn für $x = 1$ erhält sie die Summe

$$S = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty,$$

sie divergiert also für $x = 1$ und um so mehr noch für $x > 1$.

3. Satz. Die Reihe

$$S = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k}$$

konvergiert für $k > 1$

und

divergiert für $k \leqq 1$.

Um dies zu zeigen, kann man setzen

$$u_0 = \frac{1}{1^k},\ u_1 = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k},\ u_2 = \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k},\ \ldots,$$

$$u_m = \frac{1}{(2^m)^k} + \frac{1}{(2^m+1)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^k},$$

dann ist jedenfalls

$$u_1 < 2\,\frac{1}{2^k} \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$u_2 < 4\,\frac{1}{4^k} \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{(2^{k-1})^2}$$

$$u_3 < 8 \frac{1}{8^k} \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{(2^{k-1})^3}$$

. . . .

. . . .

$$u_m < 2^m \frac{1}{(2^m)^k} \text{ oder } < \frac{1}{(2^{k-1})^m}.$$

Die Summe der m ersten Glieder der vorgelegten Reihe ist somit kleiner als die Summe der Reihe, deren Glieder

$$1, \frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{(2^{k-1})^2}, \frac{1}{(2^{k-1})^3}, \ldots, \frac{1}{(2^{k-1})^m}.$$

Diese ist aber nach 2 als geometrische Reihe konvergent, wenn

$$\frac{1}{2^{k-1}} < 1 \quad \text{oder} \quad 2^{k-1} > 1 \quad \text{oder} \quad k > 1$$

ist.

4. Um zu entscheiden, ob irgend eine gegebene Reihe konvergent ist, vergleicht man sie am einfachsten mit bekannten konvergenten Reihen.

Prinzip der Reihenvergleichung.

Ist die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

konvergent, so ist auch eine andere

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

ebenfalls konvergent, wenn die Glieder der letzteren kleiner sind und kleiner bleiben als die der ersteren, d. h. wenn

$$v_1 < u_1, \; v_2 < u_2, \ldots, v_n < u_n.$$

Auf dem Prinzip der Reihenvergleichung beruhen die folgenden Kriterien, die in den meisten Fällen zur Entscheidung über die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe ausreichen.

§ 38. Konvergenzkriterien der Reihen mit positiven Gliedern.

1. Erstes Konvergenzkriterium.

Satz. Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

ist konvergent oder divergent, je nachdem

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ oder } > 1$$

ist.

Um dies zu beweisen, bringe man die gegebene Reihe auf die Form

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = u_1\left(1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \dots\right).$$

Da hierin u_1 jedenfalls endlich ist, so handelt es sich darum, zu zeigen, unter welchen Bedingungen der Ausdruck in der Klammer konvergiert. Durch Vergleichen mit der geometrischen Reihe findet man, dass derselbe konvergent ist, wenn

$$\frac{u_2}{u_1} < x, \quad \frac{u_3}{u_2} < x, \quad \dots, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < x < 1$$

ist, d. h. wenn

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Das obige Kriterium giebt keine Entscheidung über die Konvergenz oder Divergenz einer Reihe, wenn

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

wird. In diesem Falle untersuche man nach dem dritten Kriterium.

Beispiel. Für welche Werte von x ist die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

konvergent.

Es ist

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad u_n = \frac{x^n}{n!},$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n+1} < 1.$$

Die Reihe konvergiert für jeden positiven oder negativen endlichen Wert von x.

Beispiel. Die Reihe

$$1 + \frac{\lambda}{1} x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

zu untersuchen.

Man erhält

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\lambda + n}{n+1} x \Big|_{n=\infty} = x.$$

Die Reihe konvergiert für $x < 1$ und divergiert für $x > 1$.

Für $x = 1$ giebt das Kriterium keine Entscheidung über die Konvergenz der Reihe

$$1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

2. Zweites Konvergenzkriterium.

Satz. Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

ist konvergent oder divergent, je nachdem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} \lesseqgtr 1$$

ist.

Wie eine Vergleichung dieser Reihe mit der geometrischen ergiebt, tritt Konvergenz ein, wenn

$$u_1 < x, \quad u_2 < x^2, \quad u_3 < x^3, \quad \dots, \quad u_n < x^n$$

oder

$$\sqrt[n]{u_n} < x < 1$$

ist.

Beispiel. Die Konvergenzbedingungen der Reihe

$$1 + \frac{p}{1}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 x^3 + \dots$$

zu ermitteln.

Es ist

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{p}{n} x = 0 \cdot x = 0.$$

Die Reihe konvergiert somit für jeden endlichen Wert von x.

Beispiel. Für welche Werte von x ist die Reihe

$$1 + \frac{p+1}{1}x + \left(\frac{p+2}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{p+3}{3}\right)^3 x^3 + \dots$$

konvergent oder divergent.

Es ist

$$u_n = \left(\frac{p+n}{n}\right)^n x^n,$$

somit ist die Reihe konvergent oder divergent, je nachdem

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{p+n}{n} x \lessgtr 1 \quad \text{oder} \quad x \lessgtr 1.$$

3. Drittes Konvergenzkriterium.

Satz. Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

ist konvergent oder divergent, je nachdem

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \gtrless 1$$

ist. Um dies zu beweisen, vergleiche man die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

mit der Reihe

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots,$$

welche nach § 37 für $k > 1$ konvergent ist, dann ist

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim n\left(1 - \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)_{n=\infty}.$$

Um den Grenzwert des letzten Ausdrucks zu erhalten, setze man $n = \frac{1}{\delta}$, dann ist

$$\lim n\left(1-\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)_{n=\infty} = \lim \frac{1}{(\delta+1)^k}\left\{\frac{(1+\delta)^k-1}{\delta}\right\}_{\delta=0}$$

$$= \lim \frac{1}{(1+\delta)^k}\left\{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\delta+\binom{k}{3}\delta^2+\ldots\right\}_{\delta=0} = k,$$

somit ist Konvergenz oder Divergenz vorhanden, je nachdem

$$k \gtrless 1 \quad \text{oder} \quad \lim n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \gtrless 1$$

ist.

Beispiel. Die Reihe

$$1+\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}+\ldots$$

zu untersuchen.

Es ist

$$\lim n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim n\left(1-\frac{\lambda+n}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}(1-\lambda)\frac{n}{n+1} = 1-\lambda.$$

Die Reihe konvergiert also für $1-\lambda > 1$ oder $\lambda < 0$ und divergiert für $1-\lambda < 1$ oder $\lambda > 0$.

§ 39. Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

1. Besitzt eine Reihe positive und negative Glieder in unendlicher Anzahl, so wird der Wert derselben im allgemeinen von der Anordnung der Glieder abhängig sein.

Erklärung. Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern $u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \ldots$

heisst unbedingt konvergent, wenn die Summe der Reihe von der Anordnung der Glieder unabhängig ist.

Erklärung. Die Reihe heisst bedingt konvergent, wenn sie nur bei einer bestimmten Anordnung der Glieder konvergiert.

2. Bei Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern von der Form

$$(1) \qquad S = Su - Sv = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \dots$$

können folgende Fälle eintreten:

α) Die Reihen

$$Su = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$Sv = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

besitzen beide endliche Summenwerte Su und Sv, konvergieren also beide für sich, dann hat auch die Differenzenreihe

$$S = Su - Sv$$

einen endlichen Summenwert, d. h. sie ist konvergent.

β) Eine der Reihen, z. B. Su, divergiert, während die andere konvergiert, dann ist

$$S = Su - Sv = \infty - \text{endlich},$$

d. h. die Reihe divergiert.

γ) Beide Reihen sind divergent oder besitzen unendliche Summenwerte, dann tritt der Wert der Reihe in der unbestimmten Form

$$S = Su - Sv = \infty - \infty$$

auf, die bekanntlich einen endlichen oder auch unendlichen Wert haben kann. Die Reihe kann in diesem Falle divergent oder auch bedingt konvergent sein.

Aus α) ergiebt sich folgender

Satz. Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert unbedingt bei jeder Anordnung der Glieder, wenn die Reihe der positiven, sowie diejenige der negativen Glieder je für sich konvergiert.

Satz. Hinreichend für die Konvergenz einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist es, wenn die Reihe konvergiert, falls man alle Glieder mit positiven Zeichen nimmt.

Satz. Eine Reihe mit abwechselungsweise positiven und negativen Gliedern konvergiert stets, wenn die Glieder unbegrenzt abnehmen und sich der Grenze 0 mehr und mehr nähern.

Sind $u_1, u_2, u_3, \ldots$ positive Grössen und ist der Annahme gemäss

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n,$$

so lässt sich die Summe der Reihe zwischen zwei Grenzen einschliessen und auf diese Weise ihre Konvergenz erweisen.

Die beiden Anordnungen der Reihe

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots$$

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots$$

lassen erkennen, dass der Wert der Reihe einerseits kleiner als u_1, andererseits grösser als $u_1 - u_2$ ist. Die Reihe hat also einen Wert S zur Grenze, der zwischen $u_1 - u_2$ und u_1 liegt

$$u_1 > S > u_1 - u_2.$$

VI. Abschnitt.

Reihenentwickelung der Funktionen.

§ 40. Begriff der Potenzreihe.

1. Erklärung. Eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \tag{1}$$

wo a_0, a_1, a_2, ... konstante Koeffizienten sind, heisst Potenzreihe.

Dieselbe konvergiert und zwar unbedingt, wenn der Betrag des Quotienten

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} x < 1$$

wird, d. h. für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als der Betrag von $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Setzt man

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = k,$$

so lässt sich diese Bedingung auch ausdrücken durch die Vergleichung

$$-k < x < +k$$

oder

$$x^2 < k^2.$$

Es gilt somit der

Satz. Ist der Wert von x in dem Gebiet $-k < x < +k$ enthalten, so konvergiert die Reihe (1) unbedingt. Jenes Gebiet heisst das Konvergenzgebiet der Potenzreihe.

Die Reihe konvergiert für jeden Wert von x, wenn $k = \infty$, d. h. wenn

$$-\infty < x < +\infty.$$

Ob die Reihe auch auf den Konvergenzgrenzen $-k$ und $+k$ konvergiert, muss in jedem einzelnen Falle untersucht werden.

2. Leitet man die Reihe (1) nach x ab, so folgt die weitere Potenzreihe

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots,$$

die konvergent ist, wenn

$$\lim \frac{n+1}{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} x < 1$$

oder

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} x < 1.$$

Hieraus ergiebt sich demnach der

Satz. Konvergiert die Potenzreihe (1) in dem Gebiet $-k < x < +k$, so konvergiert auch jede durch Differentiation aus derselben hergeleitete Reihe in demselben Gebiet.

3. Für die Potenzreihe gilt noch der weitere

Satz. Eine Potenzreihe stellt innerhalb des Konvergenzgebietes mit allen ihren Ableitungen eine stetige Funktion von x dar; sie ist es auch noch in den Grenzen des Gebietes $x = \pm k$, wenn überhaupt Konvergenz in denselben stattfindet.

§ 41. Darstellung der Funktionen durch Potenzreihen.

Die Funktion $f(x)$ sei samt ihren n ersten Ableitungen in dem Gebiet zwischen $x = a$ und $x = b$,

die Grenzen mit eingeschlossen, eindeutig und stetig. Dies vorausgesetzt, ist dasselbe auch mit der Funktion der Fall

$$(1)\quad F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x),$$

woraus für $x = b$, bezw. $x = a$ folgt

$$(2)\qquad F(b) = f(b)$$

$$(3)\quad F(a) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Wird die Gleichung (1) nach x differentiiert, so heben sich rechts alle Glieder bis auf eines weg und erhält man

$$(4)\qquad F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Nun ist nach § 14, 2 für $x = a$ und $h = b - a$

$$(5)\qquad F(b) - F(a) = (b-a) F'\{a + \vartheta(b-a)\},$$

wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist. Hieraus ergiebt sich mit Hilfe der Formeln (2) und (4) für $F(a)$ der Ausdruck

$$(6)\quad F(a) = f(b) - (b-a)^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}\{a + \vartheta(b-a)\},$$

der, dem Ausdruck (3) gleich gesetzt, schliesslich für $f(b)$ die Entwickelung giebt

$$(7)\quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

wo

$$(8)\quad R_n = (b-a)^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} \{a + \vartheta (b-a)\}.$$

Erklärung. Man nennt die rechte Seite der Gleichung (7) eine Reihenentwickelung nach Potenzen von $(b - a)$ und bezeichnet R_n als Restglied der Reihe oder auch als den Rest der Reihe vom n^{ten} Gliede ab.

In demselben bedeutet nach § 14, Nr. 2 ϑ eine Grösse, deren Wert stets zwischen 0 und 1 liegt, die aber allgemein nicht näher angegeben werden kann.

§ 42. Der Taylorsche Lehrsatz.

Setzt man in der Entwickelung (7) des vorigen Paragraphen $a = x$ und $b - a = h$, so ergiebt sich der

Satz von Taylor. Ist die Funktion $f(x)$ in dem Gebiet von x bis $x + h$ eindeutig und stetig, so gilt die Reihenentwickelung

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

welche man gewöhnlich als die „Taylorsche Reihe" bezeichnet. Das Restglied R_n erhält hierbei die in

(8) angegebene und von Cauchy herrührende Gestalt

$$(2)\quad R_n = h^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+\vartheta h),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Nach Lagrange lässt sich demselben auch die Form geben

$$(3)\qquad R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\vartheta' h),\ 0 \leqq \vartheta' < 1.$$

Die Taylorsche Reihe konvergiert, wenn

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} R_n = 0$$

ist.

Satz. Ist die Funktion f(x) mit ihren sämtlichen Ableitungen in dem Gebiet von x bis $x+h$ eindeutig und stetig und ist $\lim R_n = 0$, so konvergiert die unendliche Taylorsche Reihe

$$(4)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

und hat den Summenwert $f(x+h)$.

Sind die Ableitungen der Funktion f(x) von der $(k+1)^{ten}$ ab sämtlich gleich Null, so gilt die endliche Reihenentwickelung

$$(5)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \dots \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x),$$

welche im allgemeinen $k+1$ Glieder enthält.

Beispiel. Die Funktion $f(x+1)$ in eine Reihe zu entwickeln, wenn $f(x) = l x$ ist.

Man erhält

$$f(x) = lx, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$f'''(x) = +\frac{1 \cdot 2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

somit ergiebt sich nach Lagrange für das Restglied R_n der Ausdruck

$$R_n = f^{(n)}(x + \vartheta h)\frac{h^n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\vartheta)^n}\frac{1^n}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n(x+\vartheta)^n},$$

der für $n = \infty$ offenbar gleich Null wird. Die Reihenentwickelung ist daher konvergent und angegeben durch

$$f(x+1) = l(x+1) = lx + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$$

$$- \frac{1}{4x^4} + \ldots$$

Diese Formel dient zur Berechnung des natürlichen Logarithmus der ganzen Zahl $x+1$ aus dem von x.

Beispielsweise ist für $x = 1$, $lx = l1 = 0$, somit

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Allgemein ist

$$l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots$$

Beispiel. Es sei $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Gesucht ist $f(x + 4)$.

Man erhält

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6, \quad f'''(x) = 6,$$
$$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = 0.$$

Es gilt somit die endliche Taylorsche Reihenentwickelung

$$f(x + 4) = x^3 - 3x^2 + 4 + \frac{4}{1}(3x^2 - 6x)$$
$$+ \frac{4^2}{2!}(6x - 6) + \frac{4^3}{3!}6 = x^3 + 9x^2 + 24x + 20.$$

§ 43. Der Maclaurinsche Lehrsatz.

Wird in § 41 Formel (7) $a = 0$ und $b = x$ gesetzt, so ergiebt sich der

Satz von Maclaurin. Ist die Funktion $f(x)$ samt ihren n ersten Ableitungen in dem Gebiet von $x = 0$ bis $x = x$ (die 0 mit eingeschlossen) eindeutig und stetig, so gilt die Entwickelung

$$(1) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

welche die Maclaurinsche Reihe heisst. Das Restglied erhält dann eine der beiden Formen

$$(2) \qquad R_n = \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\vartheta x)$$

oder

$$(3) \qquad R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta' x).$$

Für die konvergente Maclaurinsche Reihe gilt der

Satz. Ist die Funktion $f(x)$ mit ihren sämtlichen Ableitungen in dem Gebiet von $x = 0$ bis $x = x$, die Grenzen mit eingeschlossen, eindeutig und stetig, und ist $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, so ist die Maclaurinsche Reihe

$$(4) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots,$$

deren Summenwert $f(x)$ ist.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es ist

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \ldots, \quad f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

woraus für $x = 0$ folgt

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1!, \quad f''(0) = 2! \ldots, \quad f^n(0) = n!$$

Daher ist nach Maclaurin

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{(1-\vartheta x)^{n+1}}.$$

Die Reihe konvergiert als geometrische bekanntlich wenn $x < 1$ ist und divergiert, wenn $x \geqq 1$ ist.

Dies ist auch aus dem Restglied

$$R_n = \frac{x^n}{(1-\vartheta x)^{n+1}}$$

zu erkennen. Dasselbe wird für $x < 1$ und $n = \infty$ $R_n = 0$, d. h.: die Reihe konvergiert.

Für $x = 1$ wird

$$R_n = \frac{1}{(1-\vartheta)^{n+1}}.$$

Da der Voraussetzung gemäss ϑ ein rechter Bruch ist, so ist auch $1 - \vartheta$ ein solcher und $\frac{1}{1-\vartheta} > 1$, womit man erhält

$$\lim_{n=\infty} R_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(1-\vartheta)^{n+1}} = \infty.$$

Die Reihe divergiert also für $x = 1$ und umsomehr noch für $x > 1$.

§ 44. Reihenentwickelung der Exponentialfunktionen e^x und a^x.

1. Setzt man $f(x) = e^x$, so erhält man die Ableitungen $f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$ und hieraus für $x = 0$ $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$.

Daher ist nach Maclaurin

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1!} + R_n,$$

wo nach Lagrange das Restglied die Gestalt erhält

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdots \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{1} e^{\vartheta x}.$$

Dieselbe giebt zu erkennen, dass für jedes endliche x $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ ist. Somit gilt der

Satz. Die Exponentialfunktion e^x lässt sich in die nach Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$(2) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

entwickeln, die für jeden endlichen Wert von x konvergiert.

Für $x = 1$ erhält man hieraus die Reihe

$$(3) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

die zur Berechnung der Zahl e dient.

2. Aus $a^x = (e^{la})^x = e^{x\,la}$ folgt mit Zuhilfenahme der Formel (1)

$$(4) \qquad a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \ldots,$$

die ebenfalls für jeden endlichen Wert von x konvergiert, denn es ist

$$\lim \frac{U_n + 1}{U_n} = \frac{x\,la}{n+1}\Big|_{n=\infty} = 0.$$

§ 45. Reihenentwickelung der logarithmischen Funktionen.

1. Für $f(x) = lx$ erhält man

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \ldots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f(0) = -\infty, \quad f'(0) = \infty, \quad f''(0) = -\infty, \ldots,$$

woraus zu erkennen ist, dass die Reihe unbrauchbar ist.

2. Dagegen ergiebt sich für $f(x) = l(1 + x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1!}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x) = +\frac{2!}{(1+x)^3}, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

und hieraus

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1!,$$

$$f'''(0) = +2!, \ldots, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,.$$

Daher ist nach Lagrange

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{(1+\vartheta x)^n}.$$

Für $x = -1$ wird $l(1 + x)$ mit seinen sämtlichen Ableitungen unstetig. Für diesen Fall ist also die Maclaurinsche Entwickelung nicht giltig. Für

$$-1 < x < +1$$

ist

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

innerhalb dieses Gebietes konvergiert also die Potenzreihe

$$(1) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Diese Reihe divergiert aber, wenn x eine positive oder negative ganze Zahl $-1 > x > +1$ ist.

Satz. Die logarithmische Funktion $l(1 + x)$ lässt sich für $x < +1 > -1$ sowie für $x = +1$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln, deren allgemeiner Ausdruck durch (1) angegeben ist.

Für $x = +1$ erhält man die Reihe

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

deren Summe $s = \log 2$ zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, wie folgende Anordnung zeigt:

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots < 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots > 1 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

3. Setzt man in der Reihe (1) $-x$ an Stelle von $+x$, so folgt

$$(2) \qquad l(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$$

und wenn man diese Reihe von der Reihe (1) subtrahiert,

$$(3) \qquad l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Setzt man in Formel (1) $x = \frac{1}{n}$ und in (3) $x = \frac{1}{2n + 1}$, so ergeben sich die beiden Formeln

$$l(n + 1) = ln + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \ldots$$

$$l(n + 1) = ln + 2\left\{\frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{3(2n + 1)^3} + \frac{1}{5(2n + 1)^5} + \ldots\right\},$$

aus denen die natürlichen Logarithmen von $n+1$ berechnet werden können, wenn diejenigen von n bekannt sind.

§ 46. Reihenentwickelung der trigonometrischen Funktionen.

1. Die Funktion $f(x) = \sin x$. Man erhält

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

somit ist

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

und ebenso

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Für beide Reihen hat der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder den Wert

$$\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} : -\frac{x^n}{n!} = -\frac{x^2}{(n+1)(n+2)},$$

der, so gross auch ein endlicher Wert von x werden mag, bei wachsendem n immer kleiner wird und schliesslich der Grenze Null zustrebt. Die Glieder nehmen somit unbegrenzt ab und sind sowohl für ein positives wie für ein negatives x entgegengesetzten Zeichens.

Daher konvergiert die Reihe für jeden endlichen Wert von x.

Satz. Die Funktionen sin x und cos x lassen sich in die für jeden endlichen Wert von x konvergenten Potenzreihen entwickeln.

$$(1)\quad \begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

2. Ist

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

so folgt hieraus

$$\sin x = f(x) \cos x,$$

und wenn wir diese Funktion nach dem Satz von Leibniz n mal ableiten:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = f^{(n)}(x) \cos x &- \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \sin x \\ &- \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cos x \\ &+ \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \sin x + \dots \end{aligned}$$

Für x = 0 giebt diese Entwickelung die folgende Reihe

$$\begin{aligned} \sin\frac{n\pi}{2} = f^{(n)}(0) - \binom{n}{2} f^{(n-2)}(0) &+ \binom{n}{4} f^{(n-4)}(0) \\ &- \binom{n}{6} f^{(n-6)}(0) + \dots, \end{aligned}$$

aus der man $f^{(n)}(0)$ erhält, wenn $f^{(n-2)}(0)$, $f^{(n-4)}(0), \dots$

bereits bekannt sind. Da aus den ersten Gleichungen $f(0) = 0$, also auch $f''(0) = f^{(4)}(0) = \ldots = 0$ folgt, so ist diese Formel nur auf ungerade Werte von n anzuwenden und geht in die folgende über

$$f^{n}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(0) - \binom{n}{4} f^{(n-4)}(0) + \ldots$$

die für $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ die Werte liefert

$$f'(0) = 1, \quad f'''(0) = -1 + \binom{3}{2} f'(0) = 2,$$

$$f^{(5)}(0) = 1 + \binom{5}{2} 2 - \binom{5}{4} 1 = 16,$$

$$f^{(7)}(0) = -1 + \binom{7}{2} 16 - \binom{7}{4} 2 + \binom{7}{6} 1 = 272, \text{ etc.}$$

folglich erhält man die Reihenentwickelung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \frac{272}{7!} x^7 + \ldots$$

oder

$$(2) \qquad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \ldots$$

Anmerkung. In den Reihen (1) und (2) bezeichnet x den dem fraglichen Winkel gegenüberliegenden Bogen in Teilen des Halbmessers.

§ 47. Reihenentwickelung der cyklometrischen Funktionen.

1. Um die Reihenentwickelung für $y = f(x) = \arcsin x$ zu erhalten, bilde man $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ und leite den Ausdruck

$$y'\sqrt{1-x^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y'^2(1-x^2) = 1$$

weiter ab, dann ergiebt sich

$$y''(1-x^2) - y'x = 0,$$

$$y'''(1-x^2) - 3y''x - y' = 0,$$

$$y^{(4)}(1-x^2) - 5y'''x - 4y'' = 0 \text{ etc.}$$

und schliesslich allgemein die Rekursionsformel

$$y^{(n+2)}(1-x^2) - (2n+1)y^{(n+1)}x - n^2 y^{(n)} = 0,$$

die für $x = 0$ die einfache Gestalt annimmt:

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

Diese Gleichung zeigt, dass für jedes gerade n $f^{(n)}(0) = 0$ ist. Für $n = 1, 3, 5$ ergeben sich die Werte

$$f'(0) = 1, \ f'''(0) = 1, \ f^{(5)}(0) = 9, \ f^{(7)}(0) = 25 \cdot 9 \text{ etc.}$$

und damit

$$f(x) = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \tag{1}$$

Diese Reihe konvergiert für jeden Wert von $x^2 < 1$.

Satz. Die Funktion $f(x) = \arcsin x$ lässt sich in eine für jeden Wert von $x^2 < 1$ konvergente Potenzreihe entwickeln, deren allgemeiner Ausdruck durch (1) angegeben ist.

Anmerkung. Durch Quadrieren erhält man aus (1) die weitere Reihe

$$(2)\quad (\arc \sin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{x^6}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^8}{4} + \ldots,$$

die ebenfalls für $x^2 < 1$ konvergiert.

2. Ist $y = f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, so erhält man in ähnlicher Weise

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{oder} \quad y'(1+x^2) = 1$$

und hieraus

$$y''(1+x^2) + 2y'x = 0,$$

$$y'''(1+x^2) + 4y''x + 2y' = 0$$

und allgemein die Rekursionsformel

$$y^{(n+2)}(1+x^2) + (2n+2)\,y^{(n+1)}x + n(n+1)\,y^{(n)} = 0,$$

die auch direkt nach dem Satz von Leibniz für

$$uv = y'(1+x^2)$$

hervorgeht. Für $x = 0$ geht diese Formel über in

$$f^{(n+2)}(0) + n(n+1)f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{oder}$$

$$f^{n+2}(0) = -n(n+1)f^{(n)}(0).$$

Da $f(0) = 0$ ist, so sieht man auch hieraus, dass für jedes gerade n stets $f^{(n)}(0) = 0$ ist.

Für $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ folgt

$$f'''(0) = -2!, \quad f^{(5)}(0) = +4!, \quad f^{(7)}(0) = -6!, \quad \text{etc.}$$

und somit die Reihenentwickelung

$$(3)\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

die für $x^2 < 1$ konvergiert.

Einfacher ergiebt sich dasselbe Resultat auch auf folgende Weise. Durch einfache Division folgt die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots,$$

die offenbar durch Differentiation aus der Gleichung hervorgegangen ist

$$\text{arc tg}\, x + \text{Const.} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Für $x = 0$ folgt $C = 0$ und somit die Entwickelung (3).

Satz. Die Funktion arc tg x lässt sich in eine für $-1 > x \leqq +1$ konvergente Potenzreihe entwickeln, deren allgemeiner Ausdruck durch (3) angegeben ist.

Die Formeln (1) und (3) können zur Berechnung der irrationalen Zahl π benutzt werden.

Setzt man in (3) $x = 1$, so folgt die allerdings nur schwach konvergierende Reihe von Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots, \tag{4}$$

die man auch durch Zusammenfassen von je zwei Gliedern auf die Gestalt bringen kann:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left\{\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \ldots\right\}$$
$$= 1 - 2\left\{\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{11\cdot 13} + \ldots\right\},$$

welche bei der Berechnung von π rascher zum Ziel führt.

Andere Herleitungen von π erhält man, indem man sich $\frac{\pi}{4}$ aus kleineren Winkeln zusammengesetzt denkt.

Ist z. B. $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{5}$, so ist

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} 2\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi} = \frac{120}{129},$$

somit

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239},$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = 4\varphi - \frac{\pi}{4}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right\}$$

$$- \left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right\},$$

woraus sich für π der Wert ergiebt:

$$\pi = 3,\ 1415926.$$

§ 48. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

1. Es sei auf irgend einem Wege die Funktion f(x), die innerhalb eines gewissen Gebietes konvergent sei, nach Potenzen von x dargestellt worden

(1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gewisse Zahlenwerte bedeuten sollen. Durch Ableitung gewinnt man hieraus beliebig viele weitere Potenzreihen

(2) $$\begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \\ f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

die sämtlich, wie schon in § 40, 2 gezeigt worden ist, in demselben Gebiet wie $f(x)$ konvergent sind.

Setzt man in diesen Gleichungen $x = 0$, so folgt

(3) $$\begin{aligned} f(0) &= a_0 & \qquad a_0 &= f(0) \\ f'(0) &= a_1 & a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} \\ f''(0) &= 2a_2 \qquad \text{oder} & a_2 &= \frac{f''(0)}{2!} \\ f'''(0) &= 6a_3 & a_3 &= \frac{f'''(0)}{3!} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass die Reihe (1) nichts anderes als die Maclaurinsche Darstellung von $f(x)$ sein kann und dass es somit ausser dieser auch keine andere Potenzreihe für $f(x)$ giebt.

Um dies noch in anderer Weise zu beweisen, nehme man an, es existiere ausser der Reihe (1) noch eine zweite Potenzreihe für $f(x)$

(4) $$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

Dann erhält man durch Subtraktion aus (1) und (4)

$$0 = (a_0 - b_0) + x(a_1 - b_1) + x^2(a_2 - b_2) + \ldots,$$

eine Gleichung, die mindestens für alle in dem Konvergenzgebiet von $f(x)$ enthaltene Werte von x erfüllt sein muss. Das kann aber offenbar nur dann der Fall sein, wenn sämtliche Koeffizienten der Potenzen von x verschwinden, wenn also

$$0 = a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \ldots$$

oder wenn

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots$$

ist, d. h. wenn die beiden Reihen (1) und (4) identisch sind.

Satz. Eine Funktion $f(x)$ kann nur auf eine einzige Art durch eine Potenzreihe dargestellt werden, wenn überhaupt eine Reihenentwickelung möglich ist.

2. Aus obigen Ausführungen geht hervor, dass man die Reihenentwickelung von $f(x)$ auch mit unbestimmten Koeffizienten, d. h. in der Form (1) ansetzen und daraus die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ... durch Ableitung aus den Formeln (1), (2) und (3) gewinnen kann.

Erklärung. Man nennt diesen Weg der Reihenentwickelung „die Methode der unbestimmten Koeffizienten".

Wie dieselbe im einzelnen Fall angewendet wird, soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \sin x$ durch eine Potenzreihe darzustellen.

Man setze

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

so folgt hieraus durch Ableitung

$$\cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$
$$-\sin x = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ldots$$
$$-\cos x = 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + \ldots$$
$$\sin x = 24a_4 + 120a_5 x + \ldots$$

. . . .

. . . .

und wenn $x = 0$ gesetzt wird, aus diesen Gleichungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_4 = 0,$$
$$a_5 = +\frac{1}{5!}, \ldots$$

Daher erhält man die Reihenentwickelung

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

die wir auch in § 46 mit Hilfe des Maclaurinschen Satzes gewonnen haben.

§ 49. Reihenentwickelung für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

1. Der Taylorsche Lehrsatz für Funktionen von zwei Veränderlichen.

Satz. Wenn die Funktion $f(xy)$ samt ihren partiellen Ableitungen im Gebiete von xy bis $x+h$, $y+k$ eindeutig und stetig ist, so lässt sich $f(x+h, y+k)$ in eine nach Potenzen und Produkten von h und k fortschreitende Reihe entwickeln, deren allgemeiner Ausdruck ist:

$$
\begin{aligned}
f(x+h,\, y+k) = f(xy) &+ \frac{1}{1!}\left\{h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right\} \\
(1) \qquad &+ \frac{1}{2!}\left\{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right. \\
&\left. + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} + \ldots + R_n,
\end{aligned}
$$

wo R_n das in § 41 angegebene Restglied bedeutet.

Um diese Darstellung zu erhalten, entwickele man die Funktion

$$(2) \qquad F(t) = f(x+ht,\, y+kt)$$

nach dem Maclaurinschen Satze nach Potenzen von t

$$(3) \quad F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \ldots + R_n,$$

wo nach Lagrange

$$(4) \qquad R_n = F^n(\vartheta t)\frac{t^n}{n!}$$

ist.

Nun folgt aus (2), wenn man der Einfachheit halber

$$x + ht = u, \quad y + kt = v$$

setzt,

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
F(t) &= f(u, v) \\
F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial v}k \\
F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}k^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

und wenn man hierin $t = 0$ setzt

$$(6)\quad \begin{cases} F(0) = f(x, y) \\ F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k \\ F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Damit geht die Entwickelung (3) über in

$$f(x + ht, y + kt) = f(xy) + \frac{t}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right\} + \dots + R_n,$$

die sofort die Gestalt (1) annimmt, wenn darin $t = 1$ gesetzt wird.

Die Reihe konvergiert oder besitzt einen endlichen Summenwert, wenn

$$(7)\qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{F^{(n+1)}(0)}{F^{(n)}(0)} t \Big|_{t=1} < 1.$$

Hieraus folgt, wenn man für $F^{(n+1)}(0)$ und $F^{(n)}(0)$ ihre Werte aus (6) einsetzt, eine Bedingung, welcher die x und y genügen müssen, damit die Reihe konvergiere.

Der Übergang von dieser Entwickelung auf den Fall von beliebig vielen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ lässt sich nach dem Vorstehenden ohne Schwierigkeit bewerkstelligen.

Es ist

$$
\begin{aligned}
f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right) \\
(8) \qquad &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \ldots \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} h_n^2\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

2. Wird in Formel (1) $x = 0$, $y = 0$ und nachher x für h und y für k gesetzt, so geht dieselbe in die Maclaurinsche Reihe für zwei Veränderliche über:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = f(0, 0) &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} x + \frac{\partial f}{\partial \eta} y\right)_{\xi=\eta=0} \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} xy \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} y^2\right)_{\xi=\eta=0} + \ldots + R_n,
\end{aligned}
$$

wo R_n mit den gemachten Annahmen aus dem Restglied der vorigen Reihenentwickelung zu erhalten ist.

VII. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

§ 50. Maxima und Minima von entwickelten Funktionen einer Veränderlichen.

Die Funktion $y = f(x)$ stelle eine ebene Kurve dar, welche innerhalb eines gewissen Gebietes, in dem wir dieselbe betrachten wollen, überall stetig verlaufen möge.

In den in der Fig. 24 gezeichneten Lagen macht die Kurventangente in P_1 einen Winkel α mit der x-Achse, der kleiner als 90^0 ist, daher ist für die Tangente in P_1

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) > 0$$

oder positiv. Bewegt sich der Berührungspunkt P_1 in der Pfeilrichtung weiter, so wird der Winkel α immer kleiner, bis er schliesslich in der Lage der Tangente

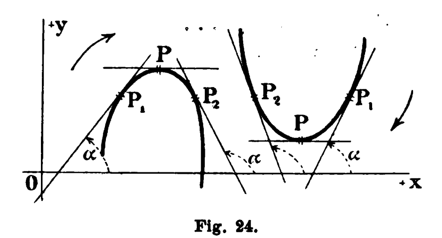


Fig. 24.

in P, wenn diese parallel zur x-Achse ist, gleich Null oder gleich 180^0 geworden ist, in diesem Falle ist für $\alpha = 0$ auch

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) = 0.$$

Bei weiterer Bewegung des Punktes P nach P_2 nimmt der Winkel α von 180^0 wieder ab; es ist also für solche Lagen von P

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) < 1$$

oder negativ.

Bei einem derartigen Übergang der Ableitung $f'(x)$ von positiven Werten durch 0 hindurch zu negativen hat die Funktion $y = f(x)$ selbst einmal einen grössten oder kleinsten Wert erreicht. Man nennt solche Werte die M a x i m a oder M i n i m a von $y = f(x)$. Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung derselben die

Vorschrift. Um diejenigen Werte von x zu ermitteln, welche zu einem Maximum oder Minimum von $y = f(x)$ gehören, leite man die Funktion $f(x)$ nach x ab und setze $f'(x) = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die gesuchten Werte von x.

Eine aus $f'(x) = 0$ gefundene Wurzel $x = a$ gehört alsdann zu einem Maximum oder Minimum der Funktion $y = f(x)$, wenn diese in der nächsten Um-

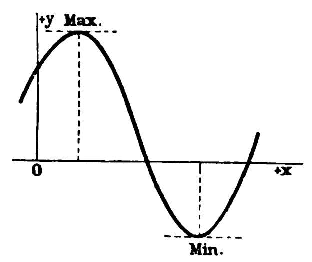


Fig. 25.

gebung von $x = a$, also für $a + \varepsilon$ und $a - \varepsilon$, beidemal algebraisch kleinere oder beidemal grössere Werte annimmt, als dies für $x = a$ der Fall ist, wo ε eine Grösse bedeutet, die beliebig klein gewählt werden kann. Man erhält also ein Maximum oder Minimum, je nachdem

$$f(a \pm \varepsilon) - f(a) \lesseqgtr 0 \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{cases} \text{ist.}$$

Beispiel. Die Funktion

$$y = ax - x^2$$

hat für $x = \frac{a}{2}$ ein Maximum, da sie sowohl für

$$x = \frac{a}{2} + \varepsilon \quad \text{wie für} \quad x = \frac{a}{2} - \varepsilon$$

den Wert

$$y = \frac{a^2}{4} - \varepsilon^2$$

annimmt, der kleiner als der Maximalwert $y = \frac{a^2}{4}$ ist.

§ 51. Herleitung des analytischen Kennzeichens von Maximum und Minimum.

1. Um das Kennzeichen für ein Maximum oder Minimum von $y = f(x)$ allgemein zu erhalten, entwickele man $f(x \pm \varepsilon)$ nach Potenzen von ε:

$$f(x \pm \varepsilon) = f(x) \pm \frac{\varepsilon}{1} f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) \pm \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

worin $f'(x) = 0$ zu setzen ist, wenn x zu einem Maximum oder Minimum von $f(x)$ gehören soll. Damit geht diese Entwickelung über in

$$f(x \pm \varepsilon) - f(x) = \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x) \pm \frac{\varepsilon^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Nimmt man hierin ε so klein an, dass das erste Glied rechts über das Vorzeichen der ganzen Summe entscheidet, so wird das letztere **negativ** oder **positiv** sein, je nachdem $f''(x)$ negativ oder positiv ist. Man erhält somit für x ein Maximum oder Minimum der Funktion $f(x)$, je nachdem $f''(x)$ negativ oder positiv ist. Es ergiebt sich somit der

Satz. **Diejenigen Werte von x, welche zu einem Maximum oder Minimum von $f(x)$ ge-**

hören, bestimmen sich als Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Ein hieraus gefundener Wert $x = a$ entspricht einem Maximum oder Minimum von $f(x)$, je nachdem

$$f''(a) \lessgtr 0 \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix} \text{ ist.}$$

Beispiel. Die Funktion

$$y = f(x) = x^3 + 3ax^2$$

auf Maxima und Minima zu untersuchen.

Durch Ableitung ergiebt sich

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 6ax$$
$$y'' = f''(x) = 6x + 6a.$$

$f'(x) = 0$ giebt als Wurzeln $x = 0$ und $x = -2a$, womit $f''(x)$ den Wert erhält

$$f''(0) = +6a, \quad f''(-2a) = -6a.$$

Bei positivem a entspricht daher dem Wert $x = -2a$ das Maximum

$$y = f(-2a) = 4a^3$$

und dem Wert $x = 0$ das Minimum

$$y = f(0) = 0.$$

Zeichne das Bild der Funktion $y = x^3 + 3ax^2$.

Beispiel.

$$y = 4x^3 + 3ax^2 - 6a^2x,$$

Maximum für $x = -a$, Minimum für $x = \frac{a}{2}$.

2. Ist für eine aus $f'(x) = 0$ gefundene Wurzel x auch noch $f''(x) = 0$, so entscheidet in der obigen Reihenentwickelung das Glied mit ε^3 über das Vorzeichen der ganzen Snmme. Da dieses aber mit $x - \varepsilon$ und $x + \varepsilon$ sein Zeichen wechselt, so folgt, dass wir weder Maximum noch Minimum erhalten können. Die

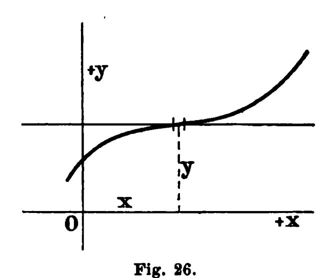


Fig. 26.

Kurve $y = f(x)$ berührt in diesem Fall nicht nur die Tangente in P, sondern durchschneidet sie auch in diesem Punkte. Derselbe ist für die Kurve ein Wendepunkt.

Ist neben $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ auch $f'''(x) = 0$, so ergiebt sich ein Maximum oder Minimum, je nachdem

$$f^{(IV)}(x) \lesseqgtr 0 \text{ oder } \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix} \text{ ist.}$$

Allgemein gilt der

Satz. Die Funktion $y = f(x)$ erhält für einen aus $f'(x) = 0$ als Wurzel gefundenen Wert von x ein Maximum oder Minimum, wenn die erste Ableitung, die für diesen Wert von x nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist

und zwar ist das erstere bezw. letztere der Fall, je nachdem dieselbe für diesen Wert negativ, positiv ist.

Beispiel. $y = (x - a)^4 + b$.

$$f'(x) = 4(x - a)^3 = 0, \text{ giebt } x = a;$$

$$f''(x) = 12(x - a)^2, \quad f'''(x) = 24(x - a),$$

$$f^{(IV)}(x) = 24.$$

Die erste Ableitung von $f(x)$, welche für $x = a$ nicht verschwindet, ist von der vierten Ordnung und ist positiv, daher besitzt $f(x)$ in $x = a$ das Minimum $y = b$.

Beispiel. $y = (x - a)^5 + b$ dagegen besitzt kein Maximum oder Minimum, da die erste Ableitung von $f(x)$, welche für $x = a$ nicht verschwindet, von ungerader Ordnung ist.

Beispiel.

$$y = x - \sqrt{1 - x}, \text{ Maximum für } x = \frac{3}{4}.$$

Beispiel.

$$y = x^{\frac{1}{x}}, \text{ Maximum für } x = e.$$

Beispiel. Das Rechteck zu bestimmen, das bei gegebenem Umfang $2a$ den grössten Inhalt hat.

Ist x eine Seite des Rechtecks, so ist $a - x$ die andere und $y = x(a - x)$ dessen Inhalt. Derselbe wird ein Maximum für $x = \frac{a}{2}$.

Satz. Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang hat das Quadrat den grössten Inhalt.

Beispiel. Unter allen Dreiecken, von denen irgend zwei Seiten die Summe $s = 2a$ haben und den

Winkel α einschliessen, dasjenige zu finden, welches den grössten Inhalt hat.

Ist eine der einschliessenden Seiten x, so ist die andere 2a — x, daher der Inhalt des Dreiecks

$$J = \frac{x}{2}(2a - x)\sin\alpha.$$

Es ist somit zu untersuchen $y = x(2a - x)$.

Man findet ein Maximum für $x = a$.

Beispiel. Aus einer Seite a und dem gegenüberliegenden Winkel α das an Fläche grösste Dreieck zu finden.

Ist der an a liegende Winkel gleich φ, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$J = \frac{a^2}{\sin\alpha}\sin\varphi\sin(\alpha + \varphi);$$

somit ist zu untersuchen

$$y = \sin\varphi\sin(\alpha + \varphi).$$

Man findet

$$y' = \cos\varphi\sin(\alpha + \varphi) + \sin\varphi\cos(\alpha + \varphi) = 0,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \varphi)$$

$$\varphi = \pi - \alpha - \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\pi - \alpha).$$

§ 52. Maxima und Minima von gebrochenen Ausdrücken.

Sind φ und ψ ganze Funktionen von x und soll ein Maximum oder Minimum von $f = \frac{\varphi}{\psi}$ bestimmt werden, so ergiebt sich als Bedingung hierfür

$$f'(x) = \frac{1}{\psi^2}(\varphi'\psi - \varphi\psi') = 0.$$

Die weitere Ableitung giebt

$$f''(x) = -2\frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^3} + \frac{\varphi''\psi - \varphi\psi''}{\psi^2}$$

oder mit Rücksicht auf die vorige Gleichung

$$f''(x) = \frac{1}{\psi^2}(\varphi''\psi - \varphi\psi'').$$

Da der Nenner ψ^2 keinen Einfluss auf das Vorzeichen dieses Ausdruckes haben kann, so darf zur weiteren Untersuchung an Stelle von $f'(x)$ der Ausdruck $\psi\varphi' - \varphi\psi' = u'(x)$ gesetzt werden. Einem aus

$$u'(x) = \psi\varphi' - \varphi\psi' = 0$$

gefundenen Wert von x entspricht daher ein Maximum oder Minimum von f(x), je nachdem für denselben

$$u''(x) = \psi\varphi'' - \varphi\psi'' \lesseqgtr 0$$

oder $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ ist.

Ist schliesslich $\varphi = 1$, so geht f in den reziproken Wert von ψ über $f = \frac{1}{\psi}$ und erhält man zur Bestimmung eines Maximums oder Minimums

$$u'(x) = -\psi'(x) = 0.$$

Die hieraus hervorgehenden Werte x gehören zu einem Maximum oder Minimum von f, je nachdem

$$u''(x) = -\psi''(x) \lesseqgtr 0 \quad \text{oder} \quad \psi''(x) \gtreqless 0$$

ist.

Einem Maximum oder Minimum von f entspricht also ein Minimum oder Maximum von ψ.

Beispiel. Aus $f = \frac{x}{x^2 + 6x + 9}$ folgt

$$u'(x) = x^2 + 6x + 9 - x(2x + 6) = 0,$$
$$u''(x) = -2x.$$

Man erhält ein Maximum für $x = +3$ und ein Minimum für $x = -3$.

Beispiel.

$$f = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1},$$

$$u'(x) = -2x(x-2) = 0, \quad u''(x) = -4x + 4.$$

$$\text{Maximum } f(2) = \frac{5}{3} \text{ für } x = 2,$$

$$\text{Minimum } f(0) = -1 \text{ für } x = 0.$$

Beispiel.

$$f = \frac{1}{x^3 + 3ax^2},$$

$$\text{Maximum } f(0) = \infty, \quad \text{Minimum } f(-2a) = \frac{1}{4a^3}.$$

§ 53. Maxima und Minima von nicht entwickelten Funktionen.

1. Sind x und y in nicht entwickelter Form durch die Gleichung

$$f(xy) = 0$$

verbunden und soll ein Maximum oder Minimum von y gesucht werden, so berechnet sich nach § 21 $y' = \operatorname{tg}\alpha$ aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \quad y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Daher wird y ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

ist.

Die Gleichung enthält im allgemeinen beide Veränderliche x und y. Sie liefert mit $f(xy) = 0$ zusammen die gesuchten Werte von x und zugleich die zugehörigen Maximal- oder Minimalwerte von y.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass für einen sich hieraus ergebenden Wert von x, für welchen also $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ist, nicht zugleich auch $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist. Ist dies der Fall, so entspricht x nicht einem Maximum oder Minimum, sondern einem mehrfachen Punkt der Kurve $y = f(x)$, wie in § 64 weiter ausgeführt ist.

Satz. Einem aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $f(xy) = 0$ gefundenen Wert von x, für welchen $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht $= 0$ ist, entspricht ein Maximum oder Minimum von y, je nachdem

$$y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \lessgtr 0$$

oder $\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}$ ist.

Man erhält diesen Wert von y″, indem man obige Gleichung unter der Voraussetzung weiter differentiiert, dass $y' = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ Funktionen von x allein sind.

Beispiel. $f(x) = x^3 + y^3 - 3pxy = 0$ (kartes. Blatt, Fig. 11).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3py = 0$$

giebt mit $f(xy) = 0$

$$1.\ x = y = 0 \quad \text{und} \quad 2.\ x = y = p\sqrt[3]{2}.$$

Das erste Wertepaar macht auch

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3px = 0;$$

für das zweite dagegen ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht $= 0$; man erhält hierfür das Maximum $y = p\sqrt[3]{2}$.

2. Für Funktionen von der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

berechnen sich die Werte von t, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen, aus $\psi'(t) = 0$. Ein solcher entspricht einem Maximum oder Minimum von y, je nachdem

$$\begin{cases} \psi''(t) \lesssim 0 \text{ oder } \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix} \text{ ist, und} \\ \varphi'(t) \text{ nicht } = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beispiel.

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= a(1 - \cos\varphi) \end{aligned}\right\} \text{Cykloide.}$$

$\psi'(\varphi) = a\sin\varphi = 0$ giebt als Wurzeln $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Da jedoch die Wurzeln $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ auch $\varphi'(\varphi) = a(1 - \cos\varphi) = 0$ be-

friedigen, so gehören dieselben zu keinem Maximum oder Minimum von y. Die Werte $\varphi = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \ldots$

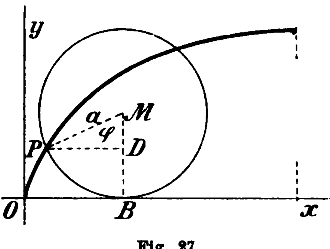


Fig. 27.

dagegen entsprechen dem Maximum $y = 2a$, das zu den höchsten Punkten der Cykloidenbögen gehört.

§ 54. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

1. Um die Funktion $z = f(xy)$ zweier Veränderlichen x und y, zwischen denen die Nebenbedingung besteht

$$\varphi(xy) = 0$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, könnte man den Wert von y hieraus berechnen und in $z = f(xy)$ einsetzen und dann in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen weiter verfahren.

Beispiel. Aus einem kreisförmigen Stamm einen Balken von grösster Tragkraft zu zimmern.

Die Tragkraft ist proportional der Breite x und dem Quadrat der Höhe y; daher soll ein Maximum oder Minimum werden

$$z = xy^2,$$

wo

$$\varphi(xy) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

ist.

Durch Elimination von y folgt

$$z = x(a^2 - x^2)$$

und hieraus

$$z' = a^2 - 3x^2 = 0, \quad x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad z'' = -6x.$$

Man erhält also ein Maximum für

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad y = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

2. Da y mit x durch die Gleichung $\varphi(xy) = 0$ verbunden ist, so kann man in $f(xy)$ letztere Veränderliche als einzige unabhängige betrachten. Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum ist dann wie in § 51 angegeben durch

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0. \tag{1}$$

Durch Differentiation der Gleichung $\varphi(xy) = 0$ erhält man zur Bestimmung von y'

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0, \tag{2}$$

womit die Bedingung (1) übergeht in

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

welche mit $\varphi(xy) = 0$ zur Ermittelung der Wertepaare xy hinreicht, für welche $z = f(xy)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Beispiel. Für obiges Beispiel ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y,$$

daher lautet hierfür die Bedingung

$$(3) \qquad y(y^2 - 2x^2) = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = 2x^2,$$

welche mit $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ zu denselben Werten für x und y führt wie oben.

3. Eine zweckmässige Abänderung dieser Methode, die vielfach mit Vorteil angewendet wird, besteht auch in folgendem. Die Bedingung (3) lässt sich in Form einer Proportion schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

wofür man auch die beiden Gleichungen setzen darf

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

oder

$$(4) \qquad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} = 0,$$

wo λ einen willkürlichen Zahlenfaktor bedeutet, dessen Elimination wieder auf die Bedingung (3) zurückführt.

Zur Bestimmung der Unbekannten x, y und λ können deshalb auch die drei Gleichungen dienen

$$(5) \quad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(xy) = 0.$$

Da man sich aus $z = f(xy)$ und $\varphi(xy) = 0$ die Grösse y eliminiert denken kann, so darf x als einzige unabhängige Veränderliche angesehen werden, daher wird die Funktion $z = f(xy)$ für ein hieraus berechnetes Wertepaar von xy ein Maximum oder Minimum, je nachdem

$$(6)\quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y'' \lesseqgtr 0$$

ist, wo y' und y'' aus $\varphi(xy) = 0$ zu bestimmen sind.

Beispiel. Die Halbachsen der Ellipse zu bestimmen, deren Gleichung

$$\varphi(xy) = 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung lässt erkennen, dass der Mittelpunkt der Kurve im Ursprung liegt. Irgend ein Punkt derselben sei $P(xy)$, dann ist dessen Entfernung vom Ursprung angegeben durch

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Daher soll im Maximum oder Minimum werden

$$z = f(xy) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \lambda(13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72),$$

wofür nach (5) die Bedingungen lauten

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda(26x - 10y) = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \lambda(-10x + 26y) = 0.$$

Durch Division folgt hieraus

$$\frac{x}{y} = \frac{26x - 10y}{-10x + 26y} \quad \text{oder} \quad x^2 = y^2,\ x = \pm y.$$

Hiefür ergiebt sich aus $\varphi = 0$

a) $x = y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, Maximum $z = 3$,

b) $x = -y = \sqrt{2}$, Minimum $z = 2$.

Die Halbachsen der Ellipse sind demnach $a = 3$ und $b = 2$.

Beispiel. Die kürzeste Entfernung eines Punktes $P(x_1 y_1)$ von der Geraden

$$\varphi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

zu finden.

$$z = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)$$

wird ein Minimum, wenn

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{b}{a}.$$

Dies ist aber der Richtungskoeffizient einer Geraden durch $P(x_1 y_1)$, die auf $\varphi = 0$ senkrecht steht.

Beispiel. In eine Ellipse (a, b) ein Rechteck von grösstem Inhalt einzubeschreiben.

$$z = xy, \quad \varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

Maximum für $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$

Beispiel. Um ein Rechteck (a, b) eine Ellipse von kleinstem Inhalt zu beschreiben.

$$z = \pi xy, \quad \varphi = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0,$$

Minimum für $x = a\sqrt{2}, \quad y = b\sqrt{2}.$

§ 55. Maxima und Minima einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Es sollen diejenigen Werte von x und y ermittelt werden, für welche

$$z = f(xy) \tag{1}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Betrachten wir die unabhängigen Veränderlichen x und y als beliebige Funktionen einer neuen Veränderlichen t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

so geht die obige Funktion z in eine solche von einer Veränderlichen t über

$$z = f\{\varphi(t), \ \psi(t)\} = F(t)$$

und wird daher nach dem vorigen Paragraphen ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(t) = 0 \tag{3}$$

ist. Da nun hierin φ und ψ völlig willkürliche Funktionen sind, so kann diese Bedingung nur bestehen, wenn die Koeffzienten von $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ gleich Null sind. Die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum von $z = f(xy)$ sind also angegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Einem hieraus gefundenen Wertepaar xy entspricht ein Maximum oder Minimum von z, je nachdem

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \lesseqgtr 0$$

ist. Leitet man die Gleichung (3) mit Berücksichtigung von (4) weiter nach t ab, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\varphi'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\varphi'\psi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\psi'^2 \\ &= A\varphi'^2 + 2B\varphi'\psi' + C\psi'^2, \end{aligned} \tag{5}$$

wo die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ als konstante Grössen mit A, B, C bezeichnet sind.

Soll dieser zweite Differentialquotient zur Entscheidung führen, so darf er in erster Linie nicht verschwinden, oder es dürfen nicht gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sein

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Der Ausdruck (5) lässt sich auch schreiben

$$(5)' \quad \begin{aligned} \frac{d^2 z}{d t^2} &= A\varphi'^2 + 2B\varphi'\psi' + C\psi'^2 \\ &= \frac{1}{A}\{(A\varphi' + B\psi')^2 + (AC - B^2)\psi'^2\}. \end{aligned}$$

Diese Form giebt zu erkennen, dass derselbe positiv bleibt, wenn $AC - B^2 > 0$ und zugleich auch $A > 0$ ist. Die Funktion z ist dann ein Minimum. Der Ausdruck wird negativ, wenn ebenfalls $AC - B^2 > 0$ und $A < 0$ ist. Die Funktion z ist dann ein Maximum.

Ist dagegen $AC - B^2 < 0$, so kann man, da φ und ψ, also auch φ' und ψ', ganz willkürliche Funktionen sind, diese nach Belieben so wählen, dass der Ausdruck (5) bald positiv, bald negativ wird. In diesem Falle erhält man weder Maximum noch Minimum. Es gilt daher die

Regel. Um die Maxima und Minima der Funktion $z = f(xy)$ zu bestimmen, setze man die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

und berechne hieraus die gemeinschaftlichen

Wertepaare x und y. Einem solchen entspricht alsdann ein Maximum oder Minimum von $z = f(xy)$, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

ist, und zwar ist das erstere bezw. letztere der Fall, je nachdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \lesseqgtr 0$$

ist.

Beispiele.

1. Die Strecke a in drei Teile zu teilen, deren Produkt ein Maximum oder Minimum wird.

Bezeichnet man zwei dieser Teile mit x und y, dann ist der dritte

$$a - x - y \text{ und ist } z = xy(a - x - y)$$

zu untersuchen. Aus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ya - 2xy - y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xa - x^2 - 2xy = 0$$

folgt

$$x = y = \frac{a}{3}.$$

Für diese Werte ergiebt sich weiter

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y = -\frac{4}{3}a,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x = -\frac{4}{3}a,$$

$$AC - B^2 = \frac{16}{9}a^2 - \frac{a^2}{9} > 0.$$

Da A negativ, so erhält man für $x = y = \frac{a}{3}$ ein Maximum und zwar $z = \frac{a^3}{27}$.

2. Welches rechtwinkelige Parallelflach hat bei gegebener Oberfläche den grössten Inhalt? Man findet, dass dies ein Würfel ist.

3. Man soll in einen Kreis ein Dreieck von grösstem Umfang zeichnen.

Sind die zu den Seiten gehörigen Centriwinkel φ_1, φ_2, $360^0 - \varphi_1 - \varphi_2$, so ist zu untersuchen der Ausdruck

$$y = \sin\frac{\varphi_1}{2} + \sin\frac{\varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Man findet ein Maximum für $\varphi_1 = \varphi_2 = 120^0$. Das gleichseitige Dreieck hat den grössten Umfang.

§ 56. Allgemeine Aufgabe über Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Soll die Funktion

$$(1) \qquad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$$

für die $m + n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$ ein Maximum oder Minimum werden, wenn die letzteren durch n Nebenbedingungen verbunden sind

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = 0, \end{cases}$$

so kann man m der Veränderlichen gleich beliebigen Funktionen einer neuen Veränderlichen t setzen und die übrigen mit Hilfe der Gleichungen (2) ebenfalls in t ausdrücken. Die so gewonnenen Funktionen seien

$$(3)\qquad x_1 = \psi_1(t),\ x_2 = \psi_2(t),\ \ldots,\ x_{m+n} = \psi_{m+n}(t),$$

dann wird die Funktion (1), die nach (3) eine Funktion von t allein ist, ein Maximum oder Minimum, wenn

$$(4)\qquad 0 = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} \cdot \frac{dx_{m+n}}{dt}.$$

Da aber die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$ durch die Gleichungen (2) zusammenhängen, so ist auch

$$(5)\qquad 0 = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m+n}}\frac{dx_{m+n}}{dt}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun könnte man aus den Gleichungen (4) und (5) die n Ableitungen

$$\frac{dx_{m+1}}{dt}, \quad \frac{dx_{m+2}}{dt}, \ldots, \frac{dx_{m+n}}{dt}$$

eliminieren und z in Funktion der übrigen willkürlich gewählten Funktionen von $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ ausdrücken.

Diese Elimination kann auch dadurch ausgeführt werden, dass man die Gleichungen (5) der Reihe nach mit den Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ multipliziert und zu (4) addiert

$$z = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n$$

und hierin diese n Faktoren so bestimmt, dass die Koeffizienten der n Ableitungen

$$\frac{dx_{m+1}}{dt}, \ldots, \frac{dx_{m+n}}{dt}$$

verschwinden. Da nun aber die Koeffizienten der übrigen m Ableitungen beliebig gewählte Funktionen von t sind, so müssen auch deren Koeffizienten verschwinden. Es müssen also die Gleichungen bestehen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+n}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{m+n}} + \ldots \\ \qquad\qquad + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{m+n}}, \end{array} \right.$$

die mit den Gleichungen (2) zur Bestimmung der $m + 2n$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hinreichen.

Satz. Um die Maxima und Minima der Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ bei n vorhandenen Nebenbedingungen (2) zu bestimmen, betrachte man unter der Voraussetzung konstanter Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots \lambda_n\varphi_n$$

als eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$ und suche die Maxima und Minima dieser Funktion zu ermitteln. Diese ergeben sich nach § 55 aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}} = 0,$$

die mit den n Bedingungen (2) zur Berechnung der $m + 2n$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ausreichen.

Beispiel. Auf jeder der drei Geraden

$$\varphi_i = y - \alpha_i x - \beta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

einen Punkt P_i zu bestimmen, dass das Dreieck $P_1P_2P_3$ ein Minimum werde.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist bekanntlich

$$\psi = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

Daher soll ein Maximum werden

$$z = \psi + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3,$$

wofür die Bedingungen sind

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Durch partielle Ableitung nach x_1 und y_1 findet man z. B.

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_3) - \lambda_1 a_1 = 0, \quad \frac{1}{2}(-x_2 + x_3) + \lambda_1 = 0,$$

woraus nach Elimination von λ_1 folgt

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = a_1,$$

d. h. die Seite $P_2 P_3$ ist parallel der gegenüber liegenden Geraden φ_1; das gesuchte Dreieck ist somit das Mittendreieck.

VIII. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebene Geometrie.

---

§ 57. Einleitende Bemerkungen.

1. Ist $y = f(x)$ oder $F(x\,y) = 0$ die Gleichung einer ebenen Kurve, so liegt ein Punkt P derselben zur Abscisse x oberhalb oder unterhalb der Abscissenachse, je nachdem die zugehörige Ordinate y, die sich für das gegebene x aus $y = f(x)$ oder $F(x\,y) = 0$ berechnet, positiv oder negativ ist.

2. Aus $f(x) = 0$ oder $F(x, 0) = 0$ ergeben sich die Abscissen der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse, vorausgesetzt, dass y direkt vor oder nach

einem solchen Punkt sein Zeichen wechselt. Findet dieser Wechsel nicht statt, so ist die x-Achse Tangente an die Kurve. Analog für die y-Achse.

3. Die Gerade $y = \alpha x + \beta$ schneidet die Kurve $F(xy) = 0$ in Punkten, deren Abscissen sich aus $F(x, \alpha x + \beta) = 0$ berechnen.

4. Eine Kurve liegt symmetrisch zur y-Achse, wenn ihre Gleichung ungeändert bleibt, wenn man $+x$ an Stelle von $-x$ setzt oder wenn sie nur gerade Potenzen von x enthält.

5. Mittelpunkt. Für die Kurve $F(xy) = 0$ ist der Ursprung Mittelpunkt, wenn zu einem Punkt $P(x, y)$ ein Punkt $P(-x, -y)$ vorhanden ist.

Für die Kurve mit der Gleichung

$$F(xy) = x^3 - 3xy^2 - y = 0$$

ist der Ursprung Mittelpunkt, da dieselbe ungeändert bleibt, indem man an Stelle von $+x$, $+y$; $-x$, $-y$ setzt.

Aufgabe. Den Mittelpunkt der Kurve

$$F(xy) = x^2 - 2y^2 + 2xy - x + 1 = 0$$

zu bestimmen.

Der gesuchte Mittelpunkt habe die Koordinaten a, b; verschiebt man nun das Koordinatensystem um a, b, indem man setzt

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b,$$

so geht obige Gleichung über in

$$f(\xi + a, \eta + b) \equiv \xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2 + \xi(2a + 2b - 1) \\ + \eta(2a - 4b) + a^2 + 2ab - b^2 - a + 1 = 0.$$

Soll nun der neue Ursprung Mittelpunkt sein, so muss sein

$$2a + 2b - 1 = 0$$
$$2a - 4b = 0,$$

woraus folgt

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{6}.$$

Der gesuchte Mittelpunkt liegt in $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

§ 58. Einführung von Polarkoordinaten.

1. Ein Punkt P in der Ebene wird bestimmt, indem man seine Koordinaten, Abscisse x und Ordinate y, die nach Grösse und Vorzeichen gegeben sind, in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem einträgt. Seine Lage lässt sich indessen auch dadurch in eindeutiger Weise angeben, dass man den Winkel $\angle POx = \varphi$ in O an Ox anlegt und auf dem freien Schenkel desselben die Entfernung $OP = r$ abträgt.

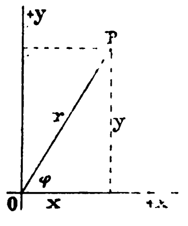


Fig. 28.

Erklärung. Man nennt r und φ die Polarkoordinaten des Punktes P und bezeichnet Ox als Achse und O als Pol des Polarkoordinatensystems.

Die rechtwinkeligen Koordinaten x und y des Punktes P sind mit den Polarkoordinaten r und φ desselben durch die Gleichungen verbunden

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Hieraus folgt umgekehrt

$$(2)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \\ \cos \varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin \varphi = \dfrac{y}{r}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1) und (2) dienen dazu, eine Gleichung zwischen rechtwinkeligen Koordinaten in eine solche zwischen Polarkoordinaten oder umgekehrt umzuwandeln.

Beispiel. Die Gleichung der Lemniskate (Fig. 43)

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

erhält mit Hilfe der Gleichungen (1) folgende Gestalt in Polarkoordinaten

$$r^2 - a^2 \cos 2\varphi = 0.$$

2. Wenn im folgenden Polarkoordinaten zur Anwendung kommen, so soll dabei stets r als Funktion von φ angesehen werden.

Von der Funktion $r = f(\varphi)$ erhält man dann die Ableitungen

$$(3)\quad \frac{dr}{d\varphi} = r' = f'(\varphi) \quad \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = r'' = f''(\varphi), \ldots$$

Den Zusammenhang zwischen rechtwinkeligen und Polarkoordinaten vermitteln die Gleichungen (1). Durch Differentiation gewinnt man hieraus neue Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} dx = dr \cos\varphi - r \sin\varphi \, d\varphi \\ dy = dr \sin\varphi + r \cos\varphi \, d\varphi \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi}{dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi} & \text{oder} \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi}, \end{cases}$$

wodurch die Differentiale dx, dy und der Quotient y' in die entsprechenden Grössen der Polarkoordinaten verwandelt sind. Die weitere Differentiation ergiebt

(6) $$\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}.$$

Die vorstehenden Formeln dienen dazu, Ausdrücke von der Form $f(xy, y'y'')$ in solche von der Form $f(r\varphi, r'r'')$ zu verwandeln.

Beispielsweise gilt die Beziehung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

deren Bedeutung aus § 66 zu erfahren ist.

§ 59. Tangente und Normale.

a. Für rechtwinkelige Koordinaten.

Erklärung. Eine Tangente ist eine Sekante, welche die Kurve in zwei unendlich benachbarten Punkten schneidet.

Nach § 14 ist die Richtungskonstante der Sekante PP' angegeben durch

(1) $$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Die Sekante selbst ist demnach dargestellt durch die Gleichung

$$\eta - y = \frac{\triangle y}{\triangle x}(\xi - x),$$

wo ξ η die laufenden Koordinaten und x y diejenigen des Punktes P(x y) bezeichnen.

Die Sekante geht in eine Tangente in P über, wenn $\triangle x$ und $\triangle y$ unendlich klein werden. In diesem Augenblick geht aber der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in die Ableitung $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$ und der Winkel α' in den Winkel α über, den die Kurventangente in P mit der x-Achse macht, daher ist $\operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x)$.

Die Gleichung der Tangente im Punkt P(x y) an die Kurve $y = f(x)$ ist demnach angegeben durch

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta - y = y'(\xi - x) \quad \text{oder} \\ \eta - y = f'(x)(\xi - x). \end{cases}$$

Ist die Kurvengleichung in der Form gegeben $F(x y) = 0$, so ist nach § 21

$$y' = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

und lautet demnach die Gleichung der Tangente

$$(3) \qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Für den Fall, dass die Kurvengleichung in Parameterform dargestellt ist durch

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

ergiebt sich als Gleichung der Tangente

$$4) \qquad (\xi - x)\psi'(t) - (\eta - y)\varphi'(t) = 0.$$

Beispiel. Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Durch Ableitung folgt hieraus

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -x : y,$$

daher die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x) \quad \text{oder} \quad \xi x + \eta y - r^2 = 0.$$

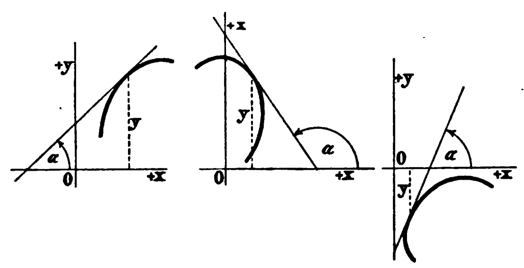


Fig. 21.

Erklärung. Die Normale ist eine gerade Linie, welche im Berührungspunkt auf der Tangente senkrecht steht.

Ihre Richtungskonstante ist demnach angegeben durch

$$\operatorname{tg}(90 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{y'}.$$

Den oben aufgestellten Tangentengleichungen entsprechen daher als zugehörige Normalengleichungen

Gleichung der

Kurve	**Tangente**
$y = f(x)$	$\eta - y = y'(\xi - x)$
$F(xy) = 0$	$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$
$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$	$(\xi - x)\psi'(t) - (\eta - y)\varphi'(t) = 0,$

Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$$

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$(\xi - x)\varphi'(t) + (\eta - y)\psi'(t) = 0.$$

Beispiel. Für den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ lautet die Gleichung der Normalen

$$\eta x - \xi y = 0 \quad \text{oder} \quad \xi : \eta = x : y,$$

woraus folgt: Jede Normale des Kreises geht durch den Mittelpunkt desselben.

b. Für Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten

$$r = f(\varphi)$$

gegeben, so ist der Winkel α, den die Tangente im

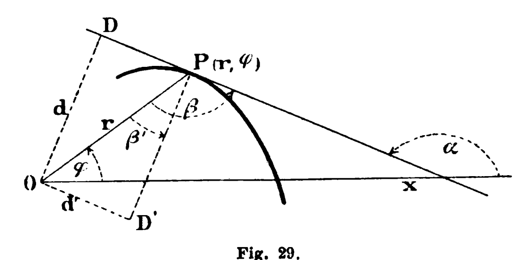


Fig. 29.

Punkt $P(r, \varphi)$ mit der Polarachse macht, bestimmt durch

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r\cos\varphi + r'\sin\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi}.$$

Führt man noch den $\sphericalangle \beta$ zwischen Tangente und Radiusvektor ein, so ist $\alpha = \beta + \varphi$, $\beta = \alpha - \varphi$ und somit

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{r}{r'},$$

woraus folgt

$$\sin \beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Ausserdem ist die Entfernung der Tangente vom Ursprung angegeben durch

$$O D = O P \sin \sphericalangle O P D \quad \text{oder}$$

$$\text{(7)} \qquad d = r \sin \beta = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Die Richtungskonstante der Normale $P D'$ im Punkte $P(r, \varphi)$ ist

$$\operatorname{tg}(\alpha - 90) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{r' - r \operatorname{tg} \varphi}{r + r' \operatorname{tg} \varphi}.$$

Führt man den $\sphericalangle \beta'$ zwischen Normale und Radiusvektor ein, so folgt

$$\text{(8)} \qquad \beta' = \beta - 90, \quad \operatorname{tg} \beta' = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{r'}{r}$$

und ist die Entfernung d' des Pols 0 von der Normale angegeben durch

$$O D' = O P \sin \sphericalangle O P D' \quad \text{oder}$$

$$\text{(9)} \qquad d' = r \sin \beta' = -\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Beispiel. Für die logarithmische Spirale (Fig. 30), deren Gleichung $r = a e^{k\varphi}$ ist, erhalten wir $r' = a k e^{k\varphi}$, somit $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{k}$.

Satz. Für die logarithmische Spirale ist

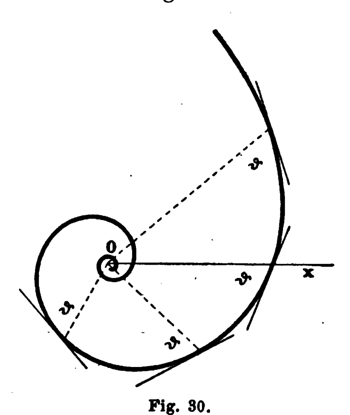


Fig. 30.

der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor konstant.

§ 60. Länge der Tangente und Normale, Subtangente und Subnormale.

a. Für rechtwinkelige Koordinaten.

Erklärung. Unter der Länge der Tangente T, bezw. der Normalen N versteht man die Entfernung des Berührungspunktes vom Schnittpunkt der Tangente, bezw. Normalen von der x-Achse. Subtangente St und Subnormale Sn sind die Projektionen jener Strecken auf die x-Achse. Es ist nach der Figur

$$\begin{aligned} PC &= T = \text{Länge der Tangente,} \\ PD &= N = \quad „ \quad „ \quad \text{Normalen,} \\ CA &= St = \quad „ \quad „ \quad \text{Subtangente,} \\ AD &= Sn = \quad „ \quad „ \quad \text{Subnormalen.} \end{aligned}$$

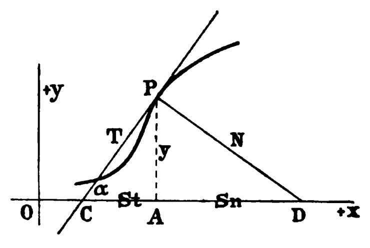


Fig. 31.

Setzt man in der Tangenten-, bezw. Normalengleichung $\eta = 0$, so folgt

$$OC = \xi = \frac{1}{y'}(xy' - y), \quad OD = \xi = x + yy'$$

und somit als

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{Subtangente } CA = St = \dfrac{y}{y'} \quad \text{und} \\ \text{Subnormale } AD = Sn = yy'. \end{cases}$$

Aus den rechtwinkeligen Dreiecken APC und APD folgt weiter als Länge der

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Tangente } PC = T = \dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \\ \text{Normalen } PD = N = y\sqrt{1 + y'^2}. \end{cases}$$

Beispiele.

1. Für die Parabel $y^2 = 2px$, folgt

daher
$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2x}} = \frac{p}{y},$$

$$St = 2x, \ Sn = p, \ T = \sqrt{2x(p + 2x)}, \ N = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

Satz. Die Parabel ist die einzige Kurve, deren Subnormale konstant ist.

2. Für die Exponentialkurve $y = a e^{\frac{x}{a}}$ folgt

$$St = a, \quad Sn = a e^{\frac{2x}{a}}, \quad T = a\sqrt{1 + e^{\frac{2x}{a}}},$$

$$N = a e^{\frac{x}{a}}\sqrt{1 + e^{\frac{2x}{a}}}.$$

Satz. Die Exponentialkurve ist eine Kurve, deren Subtangente konstant ist.

3. Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ist

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y' = -\frac{b}{a}x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

daher

$$St = -\frac{1}{x}(a^2 - x^2), \quad Sn = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

$$T = -\frac{1}{ax}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(a^4 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$N = \frac{b}{a^2}(a^4 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}},$$

wo $e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt ist.

4. Für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ergiebt sich

$$y = \frac{b}{a}(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y' = \frac{b}{a}x(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

somit

$$St = \frac{1}{x}(x^2 - a^2), \quad Sn = \frac{b^2}{a^2}x,$$

$$T = \frac{1}{ax}(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(e^2 x^2 - a^4)^{\frac{1}{2}},$$

$$N = \frac{b}{a^2}(e^2 x^2 - a^4)^{\frac{1}{2}},$$

wo $e^2 = a^2 + b^2$ gesetzt ist.

b. Für Polarkoordinaten.

Ist PA die Kurvennormale und errichtet man in O auf OP ein Lot, welches die Tangente in B und die Normale in A schneidet, so heisst PB = T die Polar-

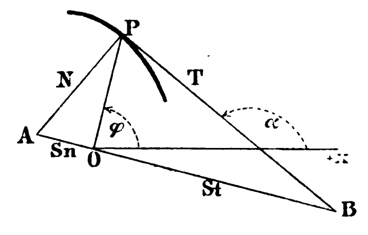


Fig. 32.

tangente, PA = N die Polarnormale, OB = St die Polarsubtangente und OA = Sn die Polarsubnormale.

Eine einfache Betrachtung der Dreiecke OPA und OPB führt zu den Beziehungen:

Länge der

$$(3)\quad \begin{cases} \text{Polartangente} & PB = T = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}, \\ \text{Polarnormalen} & PA = N = \sqrt{r^2 + r'^2}, \\ \text{Polarsubtangente} & OB = St = r\,tg\,\beta = \frac{r^2}{r'}, \\ \text{Polarsubnormale} & OA = Sn = r\cot\beta = r'. \end{cases}$$

Beispiel. Die Spirale des Archimedes hat die Gleichung

$$r = a\varphi.$$

Für sie ist $r' = a$ und somit $tg\,\beta = \frac{r}{a} = \varphi$,

$$St = a\varphi^2, \quad Sn = r' = a.$$

Satz. Für die Spirale des Archimedes ist die Subnormale konstant, wodurch eine einfache Konstruktion der Tangente angezeigt ist.

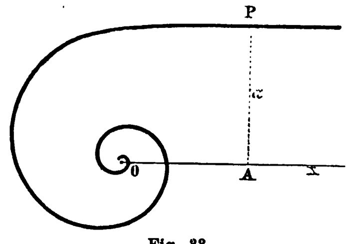


Fig. 33.

Beispiel. Die hyperbolische Spirale (Fig. 33) hat die Gleichung

$$r\varphi = a,$$

wo a eine gegebene Strecke bezeichnet.

Für sie erhalten wir $r = \frac{a}{\varphi}$, $r' = -\frac{a}{\varphi^2}$ und somit

$$T = -\frac{a}{\varphi}\sqrt{\varphi^2 + 1}, \quad N = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2 + 1},$$

$$St = -a, \quad Sn = -\frac{a}{\varphi^2}.$$

Die Subtangente der hyperbolischen Spirale ist konstant, wodurch eine einfache Konstruktion der Tangente gegeben ist.

§ 61. Asymptoten einer Kurve.

a. Für rechtwinkelige Koordinaten.

Erklärung. Eine Asymptote ist eine gerade Linie, welche sich der Kurve mehr und mehr nähert, ohne je mit ihr zusammenzutreffen. Dieselbe kann als Tangente in einem unendlich fernen Kurvenpunkte angesehen werden.

Man erhält die Gleichungen der Asymptote einer Kurve, indem man die unendlich fernen Punkte derselben bestimmt und deren Koordinaten in die Gleichung der Tangente einsetzt.

Die Gleichung der Tangente ist

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x)$$

oder

$$\eta = f'(x)\xi + y - xf'(x).$$

Erhält man hieraus mit Hilfe der Kurvengleichung $y = f(x)$

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = A$$

und

$$\lim_{x=\infty} \{y - xf'(x)\} = B,$$

so ist die Gleichung der Asymptote

$$\eta = A\xi + B.$$

Die Grösse A giebt die Richtung nach den unendlich fernen Punkten der Kurve an und ist daher auch sehr einfach dadurch zu erhalten, dass man aus

der Kurvengleichung $F(xy) = 0$ den Wert von $\frac{y}{x}$ für $x = \infty$, $y = \infty$ bestimmt. Die Gleichungen der Asymptoten selbst werden dann gewonnen, indem man mit Benutzung der Kurvengleichung die für $\frac{y}{x}$ gefundenen Werte in die Tangentengleichung einsetzt.

Beispiel. Die Asymptoten der Kurve

$$F(xy) = x^2 - y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

zu bestimmen.

Die Gleichung $F(xy) = 0$ differentiiert giebt

$$2x - 2yy' - 2 - 2y' = 0, \quad y' = \frac{x-1}{y+1}$$

und mit x^2 durchdividiert

$$1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{2}{x} - 2\frac{y}{x^2} - \frac{3}{x^2} = 0,$$

woraus für $x = \infty$, $y = \infty$ folgt $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$ oder

$$\frac{y}{x} = A = \pm 1.$$

Mit Hilfe der Kurvengleichung lässt sich nun die Gleichung der Tangente auf die Form bringen

$$\eta = \frac{x-1}{y+1}\xi - \frac{x+y+3}{y-1}$$

oder

$$\eta = \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{1}{x}}\xi - \frac{1+\frac{y}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{1}{x}},$$

woraus für $\frac{y}{x} = \pm 1$ und $x = \infty$ sich als Gleichungen der Asymptoten ergeben

$$\eta = \xi - 2 \quad \text{und} \quad \eta = -\xi$$

oder

$$\xi - \eta - 2 = 0 \quad \text{und} \quad \xi + \eta = 0.$$

Etwaige Asymptoten, die parallel zu den Achsen, z. B. parallel zur x-Achse, laufen, werden am einfachsten direkt aus der Kurvengleichung ermittelt, indem man darin $x = \infty$ setzt unter der Voraussetzung, dass y konstant ist.

Beispiel. Die Asymptoten der Kurve

$$f(xy) = x^2y - 3x^2 - y = 0$$

zu bestimmen.

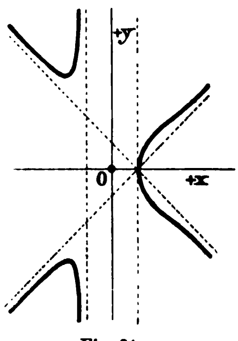


Fig. 34.

Die Kurve hat Asymptoten parallel zu beiden Achsen. Sieht man y als konstant an, während man mit $x^2 = \infty$ durchdividiert, so folgt als Gleichung der Asymptote $y - 3 = 0$; desgl. ebenso, wenn man mit $y = \infty$ durchdividiert und x als konstant ansieht $x^2 - 1 = 0$ als Gleichung der Asymptoten.

Beispiel. Die Asymptoten der Kurve (Fig. 34)

$$f(xy) = x^3 - xy^2 - a(x^2 + y^2) = 0$$

zu bestimmen.

Es ergeben sich als Asymptoten die Geraden

$$x - y - a = 0, \quad x + y - a = 0, \quad x + a = 0.$$

b. Für Polarkoordinaten.

Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten der Kurven $r = f(\varphi)$ sind bestimmt durch die Azimuts $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, für welche $r = \infty$ wird. Dieselben berechnen sich aus der Gleichung $r = f(\varphi) = \infty$ oder aus $\frac{1}{f(\varphi)} = 0$.

Ist $\varphi = \varphi_i$ ein solcher Wert von φ, so ergiebt sich die Entfernung $OD = d$ der zugehörigen Asymptote vom Pol O aus

$$d = \lim r \sin\beta = \lim_{\varphi = \varphi_i} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Die Asymptote selbst erhält man alsdann, indem man in O den $\sphericalangle DOx = \psi = 90 + \varphi_i$ an die Polarachse anlegt und auf dem zugehörigen freien Schenkel in der Entfernung $OD = d$ vom Pol das Lot errichtet. Letzteres stellt die Asymptote dar.

Beispiel. Die Asymptote der Kurve $r\varphi = a$ zu bestimmen (s. Fig. 33).

Es ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = -\frac{a}{\varphi^2},$$

somit für $r = \infty$, $\varphi = 0$.

Die Asymptote ist also parallel zur Achse.

Ferner ist

$$d = \lim_{\varphi = 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r^2}} = \lim_{\varphi = 0} \frac{a}{\sqrt{1 + \varphi^2}} = a.$$

Die Asymptote ist also das Lot im Endpunkt des Radiusvektors zum Punkt $D\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

Beispiel. Die Asymptoten der Kurve

$$r = \frac{a}{\frac{1}{2} - \cos\varphi}$$

zu bestimmen.

Es ergeben sich zwei Asymptoten, welche mit der Polarachse die Winkel $\varphi_1 = + \frac{\pi}{3}$ und $\varphi_2 = - \frac{\pi}{3}$ bilden und die Entfernung $d = \frac{2a}{3}\sqrt{3}$ vom Pol besitzen.

c. Asymptotische Punkte.

Wenn mit wachsendem (oder abnehmendem) φ der zugehörige Radius r mehr und mehr abnimmt, ohne je gleich Null zu werden, dann macht die Kurve $r = f(\varphi)$ unendlich viele Windungen um den Pol O, ohne ihn je zu erreichen. Ein derartiger Punkt wird alsdann ein asymptotischer genannt.

Beispiel. Für die hyperbolische Spirale ist der Pol ein asymptotischer Punkt.

Beispiel. Die logarithmische Spirale $r = ae^{k\varphi}$ macht in der Richtung zum Pol hin unendlich viele Windungen, derselbe ist ein asymptotischer Punkt.

§ 62. **Das Element und das Differential des Bogens.**

Verbindet man zwei benachbarte Punkte einer Kurve P und P′ mit den Koordinaten x, y und $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, so ist für kleine Werte von $\triangle x$ und $\triangle y$ der Bogen $PP' = \triangle s$ annähernd gleich der Sehne PP′. Näherungsweise kann man deshalb setzen

$$\triangle s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$$

und

$$\frac{\triangle s}{\triangle x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2},$$

wo $\triangle s$ als Element des Bogens bezeichnet wird.

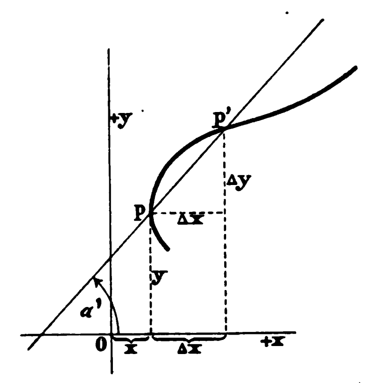


Fig. 85.

Geht man zur Grenze $\triangle x = \triangle y = 0$ über, so folgt hieraus als Ausdruck für das Bogendifferential

$$ds = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

ebenso

$$ds = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Sekante PP' mit der x-Achse macht, mit α', so ist

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\triangle y}{\triangle x}, \quad \sin \alpha' = \frac{\triangle y}{\triangle s}, \quad \cos \alpha' = \frac{\triangle x}{\triangle s}.$$

Beim Übergang zur Grenze $\triangle x = \triangle y = 0$ geht die Sekante in die Tangente im Punkte P und der

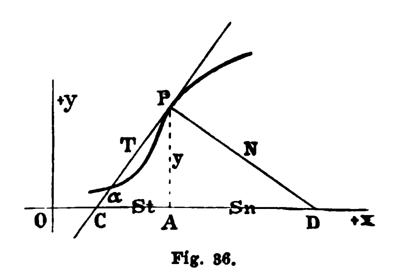


Fig. 36.

Winkel α' in den Winkel α über, den die Tangente mit der x-Achse macht. Es ist (Fig. 36)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y', \quad \sin \alpha = \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Da α auch der Winkel ist, den die Normale mit der Ordinate y macht, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{St} = \frac{Sn}{y}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{T} = \frac{Sn}{N},$$

$$\cos \alpha = \frac{St}{T} = \frac{y}{N}.$$

Beispiel. Die Asteroide (Fig. 60) hat die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Es ist somit

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$y' = - x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

womit das Differential des Bogens den Ausdruck erhält

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx,$$

ein Ausdruck, der offenbar durch Differentiation nach x hervorgegangen ist aus

$$s = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + c,$$

wo c eine Konstante bedeuten soll. Für $x = 0$ ist $s = 0$, also $c = 0$. Der Bogen der Asteroide bis zum Punkt mit der Abscisse x ist also

$$s_x = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Für $x = a$ ergiebt sich hieraus für den vierten Teil des Umfanges der Kurve

$$s_a = \frac{3}{2} a;$$

somit ist der ganze Umfang $S = 6a$.

§ 63. Konvexität und Konkavität der Kurven. Wendepunkte.

a. Für rechtwinkelige Koordinaten.

1. Erklärung. Eine Kurve ist in einem Punkte P konvex bezw. konkav nach unten, je nachdem sie in der nächsten Umgebung dieses Punktes ganz oberhalb oder ganz unterhalb der Tangente in P liegt.

Um zu entscheiden, ob eine Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, im Punkt P mit der Abscisse x konvex oder konkav nach unten sei, nehme man in der Nähe

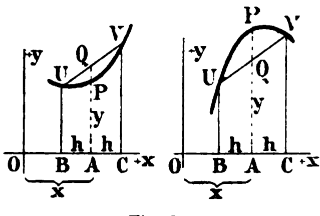


Fig. 37.

von P zwei weiteren Punkte U und V mit den Abscissen $x - h$ und $x + h$ an, ziehe UV, dann ist

$$QA = \frac{1}{2}(UB + VC) = \frac{1}{2}\{f(x-h) + f(x+h)\}$$

$$PA = y = f(x).$$

Die Kurve ist dann konvex bezw. konkav nach unten, je nachdem

$$QA - PA \gtrless 0$$

oder positiv oder negativ oder

$$\frac{1}{2}\{f(x-h) + f(x+h)\} - f(x) \gtrless 0$$

ist.

Entwickelt man hierin $f(x-h)$ und $f(x+h)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz nach Potenzen von h, so geht dieser Ausdruck über in

$$2\frac{h^2}{2!}f''(x) + 2\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \ldots \gtrless 0.$$

Bei beliebig kleinem h kommen hierin die Glieder mit h^4, h^6, ... dem ersten gegenüber als sehr kleine Grössen höherer Ordnung nicht mehr in Betracht. Es entscheidet daher $f''(x)$ über das Vorzeichen der ganzen Summe. Diese ist also positiv oder negativ, je nachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist.

Eine Kurve ist demnach in einem gewissen Punkt P mit der Abscisse x konvex oder konkav nach unten, je nachdem für diesen Punkt

$$f''(x) \gtrless 0 \tag{1}$$

oder positiv bezw. negativ ist.

Beispiel. Für die Kurven, deren Gleichung ist

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

ist

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x + 2,$$

$$y'' = f''(x) = 6x - 6.$$

Dieselbe ist also in allen Punkten, für welche

$$f''(x) > 0 \quad \text{oder} \quad x > 1$$

bezw.

$$f''(x) < 0 \quad \text{oder} \quad x < 1$$

ist, konvex bezw. konkav nach unten.

2. Wendepunkte. Ist die Kurve $y = f(x)$ auf der einen Seite des Punktes P konvex, auf der andern konkav nach unten, so heisst der Punkt P ein Wendepunkt oder Inflexionspunkt. Die in einem solchen Punkt gezogene Tangente heisst entsprechend Wende- oder Inflexionstangente.

Für einen Kurvenpunkt, der sich über einen Wendepunkt hinbewegt, muss demnach $f''(x)$ von positiven Werten zu negativen übergehen oder um-

gekehrt. Ein solcher Zeichenwechsel kann aber offenbar nur stattfinden, wenn $f'(x)$ an der Übergangsstelle durch Null hindurchgeht. Für jeden Wendepunkt der Kurve $y = f(x)$ ist somit

$$(2) \qquad y'' = f''(x) = 0.$$

Es ergiebt sich somit die

Regel. Um die Wendepunkte einer Kurve $y = f(x)$ zu bestimmen, setze man $f''(x) = 0$. Die sich hieraus ergebenden Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ sind die Abscissen der Wendepunkte von $f(x)$. Die zugehörigen Ordinaten sind dann angegeben durch

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ldots,$$

desgleichen die Tangentenrichtungen in diesen Wendepunkten durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_1), \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_2), \ldots$$

Anmerkung. Während eine gewöhnliche Tangente mit der Kurve $y = f(x)$ nur zwei konsekutive Punkte gemein hat, fallen in einer Wendeberührungstangente deren drei zusammen (Fig. 26).

Anmerkung. Ist die Tangente des zu untersuchenden Kurvenpunktes parallel zur y-Achse, so kann die konvexe Krümmung in die konkave übergehen, ohne dass P ein Wendepunkt ist. In diesem Falle ist $f''(x)$ aber nicht gleich Null.

b. Für Polarkoordinaten.

1. Eine Kurve ist in einem Punkte P konvex oder konkav gegen den Pol O, wenn die Tangente in P zwischen Pol und Kurve oder die Kurve zwischen Tangente und Pol liegt.

Um das Kennzeichen hierfür zu erhalten, ziehe man ausser OP noch zwei weitere Sektoren OU und OV mit den Azimuts $\varphi - a$ und $\varphi + a$, ziehe UV und verlängere OP bis zum Schnitt Q mit UV, dann ist die Kurve konvex oder konkav gegen den Pol, je nachdem

$$OQ - OP \gtrless 0$$

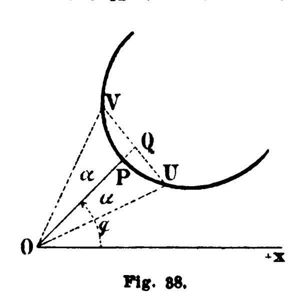


Fig. 88.

ist. Nun ergiebt eine einfache Betrachtung des Dreiecks OUV, dass

$$OQ = \frac{2\,OU \cdot OV \cdot \cos a}{OU + OV}$$

oder

$$OQ = \frac{2 \cos a\, f(\varphi + a)\, f(\varphi - a)}{f(\varphi + a) + f(\varphi - a)}$$

ist. Daher findet Konvexität oder Konkavität gegen den Pol statt, je nachdem

$$2 \cos a \frac{f(\varphi + a)\, f(\varphi - a)}{f(\varphi + a) + f(\varphi - a)} - f(\varphi) \gtrless 0$$

oder

$$2 \cos a\, f(\varphi + a)\, f(\varphi - a)$$
$$- f(\varphi)\{f(\varphi + a) + f(\varphi - a)\} \gtrless 0$$

ist.

Entwickelt man $f(\varphi + a)$ und $f(\varphi - a)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz nach Potenzen von a, fasst zusammen und dividiert mit $1 - \cos a$ durch, so geht diese Bedingung über in

$$- f^2 + f f'' \frac{\alpha^2 \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2}}{1 - \cos \alpha} - f'^2 \frac{\alpha^2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$- f' f''' \frac{\alpha^4 \cos \alpha}{3(1 - \cos \alpha)} + f''^2 \frac{\alpha^4 \cos \alpha}{24(1 - \cos \alpha)} + \ldots \gtrless 0.$$

Für sehr kleine α nähern sich sämtliche Koeffizienten, in denen α^4, α^6, ... vorkommen, dem wahren Wert 0, während diejenigen von ff'' und f'^2 nach § 31 die wahren Werte 1 und 2 erhalten.

Für sehr kleine α geht daher der vorstehende Ausdruck über in

$$- f^2 + ff'' - 2f'^2 \gtrless 0.$$

Es ergiebt sich daher der

Satz. Die Kurve $r = f(\varphi)$ ist konvex oder konkav gegen den Pol, je nachdem

$$(3) \qquad \begin{aligned} - f^2 + f f'' - 2 f'^2 \gtrless 0 \quad \text{oder} \\ - r^2 + r r'' - 2 r'^2 \gtrless 0 \end{aligned}$$

oder $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ ist.

Beispiel. Wie verhält sich die Kurve $r\varphi = a$ gegen den Pol?

Es ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = - \frac{a}{\varphi^2}, \quad r'' = \frac{2a}{\varphi^3}.$$

Die Bedingung (3) geht damit über in

$$- \frac{a^2}{\varphi^2} < 0$$

d. h. in einen rein negativen Ausdruck.

Die Kurve (Spirale, Fig. 33) ist also in allen Punkten konkav gegen den Pol.

2. Satz. Die Azimuts φ, welche zu den Wendepunkten der Kurve $r = f(\varphi)$ gehören, bestimmen sich aus

$$(4) \qquad -r^2 + rr'' - 2r'^2 = 0.$$

Weitere Beispiele.

1. Die Parabel $y = x^3$ (Fig. 16) zu untersuchen. Es ist

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x.$$

Die Kurve besitzt somit im Ursprung einen Wendepunkt mit $y = 0$ als Wendetangente und verhält sich in allen Punkten, für welche $x \gtrless 0$ ist, konvex bezw. konkav nach unten.

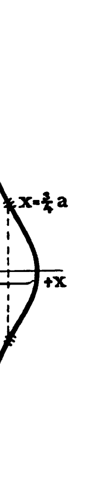


Fig. 39.

2. Die Kurve dritter Ordnung

$$f(xy) = xy^2 - a^2(a - x) = 0$$

zu untersuchen.

Die Kurve (Fig. 39) besitzt Wendepunkte in

$$P\left(\frac{3a}{4}, +\frac{a}{3}\sqrt{3}\right), \; P\left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$$

und $P(0, \infty)$.

3. Die Kurve $y = \dfrac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ (Fig. 40) hat drei Wendepunkte, die in $P_1(0, 0)$, $P_2\left(+a\sqrt{3}, +\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$ und $P_3\left(-a\sqrt{3}, -\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$ liegen und die Tangentenrichtungen

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_3 = -\frac{1}{8}$$

besitzen.

4. Die Wendepunkte sowie das Verhalten der Kurve $r = \frac{1}{\cos^3 \varphi}$ gegen den Pol zu bestimmen.

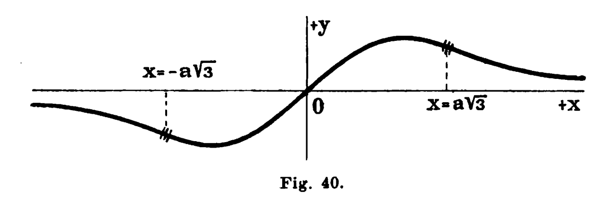


Fig. 40.

Die Kurve ist nach Bedingung (3) konvex oder konkav gegen den Pol, je nachdem

$$\varphi \lesseqgtr \pm 30^0$$

oder

$$r \lesseqgtr \frac{8}{9}\sqrt{3}.$$

Sie besitzt zwei Wendepunkte für

$$r = \frac{8}{9}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \varphi = \pm 30^0.$$

Die Kurve hat in rechtwinkeligen Koordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 - x^3 = 0$$

und ist dargestellt durch Fig. 48.

§ 64. Singuläre Punkte einer Kurve.

1. Zu den singulären Punkten einer Kurve rechnet man im allgemeinen alle Punkte einer solchen, für welche gleichzeitig die beiden partiellen Ableitungen verschwinden

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Diese Bedingungen werden insbesondere für alle Punkte einer Kurve f erfüllt, durch welche zwei oder mehr Zweige derselben hindurchgehen.

Der einfachste Fall eines singulären Punktes ist der gewöhnliche Doppelpunkt, in welchem sich also zwei Zweige der Kurve, welche im allgemeinen eine Schleife bilden, selbst durchschneiden (s. Fig. 42). Diesen beiden Kurvenzweigen entsprechend lassen sich in

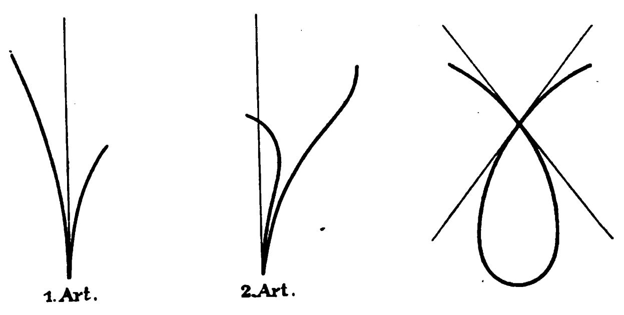


Fig. 41. Fig. 42.

jedem Doppelpunkt zwei verschiedene Tangenten an die Kurve legen. Fallen die beiden Tangenten des Doppelpunktes in eine einzige zusammen, so verschwindet die Schleife und geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt oder eine Spitze über. Je nachdem die beiden Zweige eines solchen, die in demselben endigen, auf verschiedenen oder auf der gleichen Seite der gemeinsamen Tangente liegen, spricht man von einem Rückkehrpunkt der ersten oder von einem solchen der zweiten Art (s. Fig. 41). Sind die beiden Tangenten

des Doppelpunktes nicht reell, sondern imaginär konjugiert, so ist wenigstens ihr Schnittpunkt ein reeller Kurvenpunkt. Da alsdann in dessen Umgebung keine weiteren reellen Kurvenpunkte liegen, so wird ein solcher Punkt als isolierter Punkt bezeichnet (s. Fig. 48 u. 49).

Gehen drei oder mehr Zweige durch denselben Punkt hindurch, so erhält man einen drei- oder mehrfachen singulären Punkt der Kurve. In einem solchen lassen sich drei oder mehr verschiedene Tangenten an die einzelnen Kurvenzweige ziehen, die auch wieder zusammenfallen können.

2. Um zu entscheiden, welcher Art ein singulärer Punkt ist, untersuche man das Verhalten der Richtungskonstanten $\frac{dy}{dx} = y'$ der Tangente in einem solchen. Ist $P(xy)$ ein singulärer Punkt der Kurve $f(xy) = 0$, deren partielle Ableitungen der Einfachheit halber mit f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}, ... bezeichnet werden mögen, so erscheint der Bedingung (1) zufolge für einen solchen die Richtungskonstante

$$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = -f_1 : f_2$$

in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren wahren Wert wir nach § 31 erhalten, indem wir Zähler und Nenner nach x differentiieren

$$y' = -\frac{df_1}{dx} : \frac{df_2}{dx} = -\frac{f_{11} + f_{12}\,y'}{f_{21} + f_{22}\,y'},$$

woraus folgt

$$f_{11} + 2f_{12}\,y' + f_{22}\,y'^2 = 0 \tag{2}$$

oder

$$(2)^* \qquad y' = \frac{1}{f_{22}} \left\{ - f_{12} \pm \sqrt{f_{12}^2 - f_{11} f_{22}} \right\}.$$

Vorausgesetzt, dass dieser Wert nicht noch einmal unbestimmt wird, ergeben sich also in einem solchen Punkte zwei verschiedene Werte von y' oder, was dasselbe ist, zwei verschiedene Tangentenrichtungen, welche nur zwei verschiedenen Kurvenzweigen angehören können, die sich in demselben durchschneiden. Setzt man diese Werte in die Tangentengleichung ein, so ergiebt sich nach einiger Umformung derselben als Gleichung des im Doppelpunkte vorhandenen Tangentenpaares der Ausdruck

$$(3) \qquad \begin{aligned} (\eta - y)^2 f_{22} + 2(\eta - y)(\xi - x) f_{12} \\ + (\xi - x)^2 f_{11} = 0. \end{aligned}$$

Die beiden Tangenten des Doppelpunktes sind reell und verschieden, so lange in (2)

$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} > 0$$

ist. Ist aber

$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = 0,$$

so fallen die beiden Tangenten des Doppelpunktes in eine einzige zusammen, die Schleife verschwindet und der Doppelpunkt geht in einen Rückkehrpunkt oder eine Spitze über.

Ist endlich

$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} < 0,$$

so sind die beiden Werte von y' imaginär konjugiert. Der Doppelpunkt geht in einen isolierten Punkt über. Dieses Resultat lässt sich zusammenfassen wie folgt:

Satz. Genügt ein Wertepaar xy von $f(xy) = 0$ den beiden Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so entspricht dasselbe einem Doppelpunkt der Kurve $f(xy)$. Dieser ist ein wirklicher Doppelpunkt mit zwei reellen getrennten Tangenten oder ein Rückkehrpunkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten oder ein isolierter Punkt mit imaginärem Tangentenpaar, je nachdem

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtreqless 0 \tag{4}$$

ist.

Wenn ausser f_1 und f_2 auch f_{11}, f_{12}, f_{22}, nicht aber f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} verschwinden, so ist der Punkt ein dreifacher Punkt von f, dessen Tangentenrichtungen sich als Wurzeln der Gleichung berechnen

$$f_{111} + 3 f_{112} y' + 3 f_{122} y'^2 + f_{222} y'^3 = 0.$$

Beispiele.

a. Wirkliche Doppelpunkte.

1. Die singulären Punkte der Kurve

$$f = xy^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

zu bestimmen.

Die beiden Gleichungen

$$f_1 = y^2 - 2x + 2 = 0, \quad f_2 = 2xy = 0$$

werden befriedigt durch

$$x = 1, \quad y = 0,$$

also ist P(1, 0) ein singulärer Punkt von f. Die weitere Ableitung giebt

$$f_{11} = -2, \quad f_{12} = 2y, \quad f_{22} = 2x,$$

woraus für $x = 1$, $y = 0$ folgt

$$f_{11} = -2, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 2,$$

daher ergeben sich als Tangentenrichtungen des Doppelpunktes P(1, 0)

$$-2 + 2y'^2 = 0, \quad y' = \pm 1.$$

2. Das Folium von Descartes (Fig. 11), dessen Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3pxy = 0$$

ist, besitzt im Ursprung einen reellen Doppelpunkt mit $x = 0$ und $y = 0$ als Tangenten.

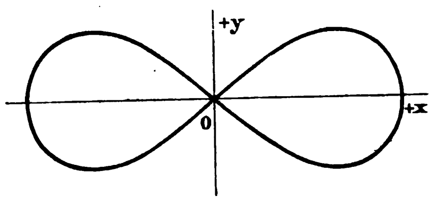


Fig. 43.

3. Die Lemniskate von Bernouilli (Fig. 43)

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

hat ebenfalls im Ursprung einen Doppelpunkt mit $\eta = \pm \xi$ als Tangenten.

4. Die Kurve vierter Ordnung (Fig. 44)

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x + a^4 = 0$$

hat drei Doppelpunkte, die in

$$\begin{matrix} x = a & x = -a & x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \\ y = 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \\ y = -a \end{matrix}$$

liegen und denen die Tangentenpaare angehören

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(\xi - a), \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(\xi + a), \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}(\xi - a).$$

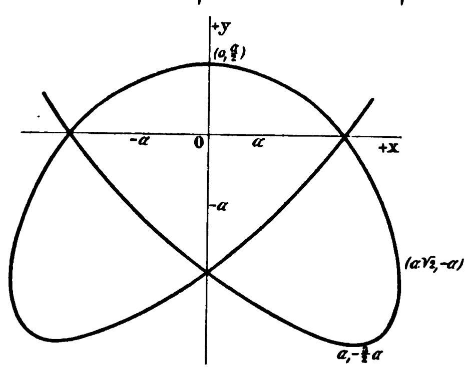


Fig. 44.

b. Rückkehrpunkte.

4. Die Neilsche Parabel (Fig. 45)

$$y^2 - ax^3 = 0$$

besitzt im Ursprung einen Rückkehrpunkt (1. Art) mit $y = 0$ als Rückkehrtangente.

5. Die Cissoide

$$y^2(2a - x) - x^3 = 0$$

hat ebenfalls im Ursprung einen Rückkehrpunkt (1. Art) mit $y = 0$ als Rückkehrtangente. (Fig. 46.)

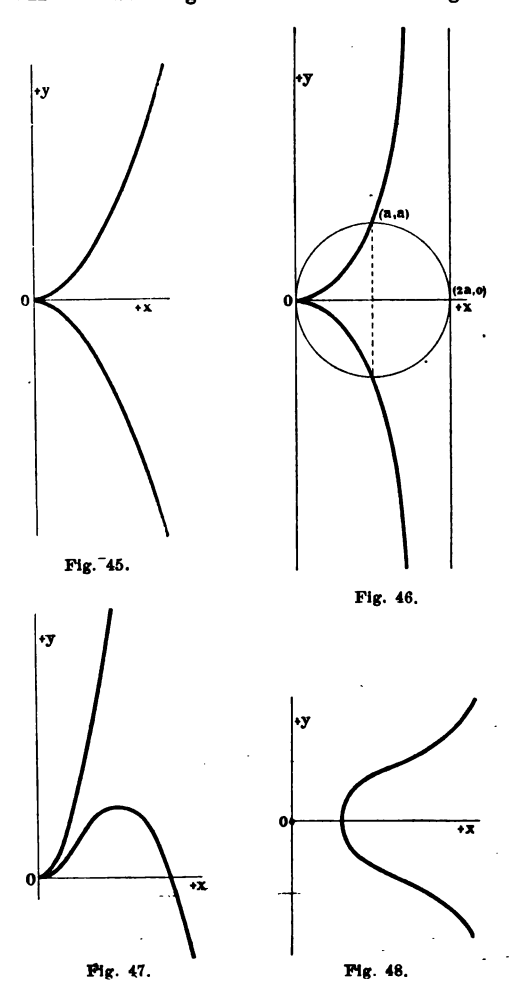


Fig. 45.

Fig. 46.

Fig. 47.

Fig. 48.

6. Die Kurve (Fig. 47)

$$y = 2x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$$

besitzt im Ursprung einen Rückkehrpunkt (2. Art) mit $y = 0$ als Rückkehrtangente.

c. Isolierte Punkte.

7. Die Kurven

$$a^2x^2 + b^2y^2 - x^3 = 0, \quad a^2x^2 + b^2y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

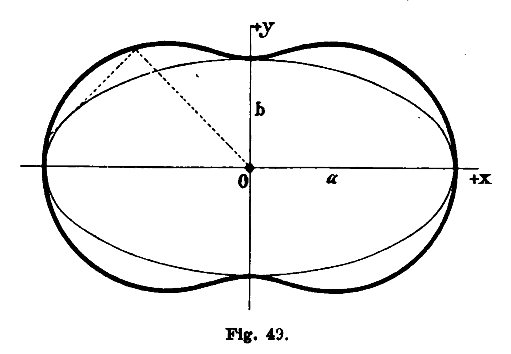


Fig. 49.

(Fig. 48 und 49) besitzen im Ursprung isolierte Punkte. Die letztere ist als Fusspunktskurve der Ellipse bekannt.

§ 65. Berührung von ebenen Kurven.

1. Es seien $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ die Gleichungen zweier ebenen Kurven, welche beide durch den Punkt $P(xy)$ gehen sollen.

Die beiden Kurven f und φ berühren sich in P, wenn sie in demselben eine gemeinschaftliche Tangente besitzen oder durch zwei benachbarte Punkte gemeinsam

hindurchgehen — einfache Berührung. Fällt noch ein weiterer Punkt jeder Kurve in den Punkt P(xy), so sagt man auch, die Kurven oskulieren sich in demselben. Fallen vier oder noch mehr benachbarte Punkte beider Kurven in den Punkt P, so ist derselbe ein Berührungspunkt höherer Ordnung.

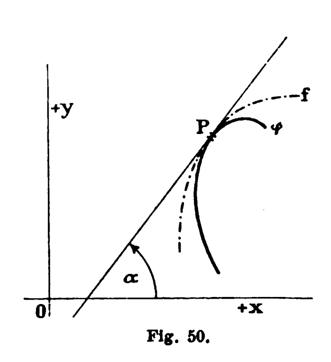


Fig. 50.

Ist P (xy) ein gemeinsamer Punkt beider Kurven, so muss sein

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x).$$

Gehen beide noch durch den benachbarten Punkt $P'(x + \triangle x, y + \triangle y)$, so muss ausserdem noch sein

$$f(x + \triangle x) = \varphi(x + \triangle x).$$

Für $\triangle x = 0$ fällt der Punkt P' mit P zusammen; die Bedingungen, dass sich die Kurven in P (xy) einfach berühren, sind daher

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi(x) \qquad\qquad &= 0 \\ f(x + \triangle x) - \varphi(x + \triangle x) &= 0. \end{aligned}$$

Entwickelt man den zweiten Ausdruck mittels des Taylorschen Satzes nach Potenzen von $\triangle x$, so folgt

$$f(x) + \triangle x f'(x) + \frac{\triangle x^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

$$- \varphi(x) - \triangle x \varphi'(x) - \frac{\triangle x^2}{2!} \varphi''(x) - \ldots = 0,$$

wo $f(x) - \varphi(x) = 0$ ist. Wird der übrig bleibende Ausdruck mit $\triangle x$ dividiert und nachträglich $\triangle x = 0$ gesetzt, so geht derselbe über in

$$f'(x) - \varphi'(x) = 0.$$

Es fallen also zwei Schnittpunkte von f und φ in P(xy) zusammen oder die beiden Kurven berühren sich einfach in P(xy), wenn gleichzeitig die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) - \varphi(x) = 0 \\ f'(x) - \varphi'(x) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Ebenso findet man, dass drei Schnittpunkte von f und φ in P zusammenfallen oder dass sich die beiden Kurven in P oskulieren (eine 2-punktige Berührung eingehen), wenn gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sind

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) - \varphi(x) = 0 \\ f'(x) - \varphi'(x) = 0 \\ f''(x) - \varphi''(x) = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Allgemein fallen i-Schnittpunkte von f und φ in P(xy) zusammen oder die Kurven berühren sich (i — 1)-punktig in P, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) - \varphi(x) = 0 \\ f'(x) - \varphi'(x) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f^{(i-1)}(x) - \varphi^{(i-1)}(x) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Daher gilt der

Satz. Zwei Kurven f und φ gehen in einem Punkt P mit den Koordinaten x und y eine

Berührung $(i-1)^{ter}$ Ordnung ein, wenn die i Bedingungen (4) erfüllt sind.

Die in dem System (6) enthaltenen Gleichungen dienen zur Bestimmung gewisser in f und φ auftretenden Konstanten. So kann die Gerade $ax+by+1=0$ nur eine Berührung von der ersten, der Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ nur eine Berührung von der zweiten Ordnung eingehen, da die Gerade, bezw. der Kreis nur von zwei bezw. drei Konstanten abhängt. Der Kegelschnitt

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1 = 0$$

kann mit einer höheren Kurve φ eine Berührung erster, zweiter, dritter und höchstens vierter Ordnung eingehen, da dessen Gleichung fünf unabhängige Konstanten a, b, c, d, e enthält.

Beispiel. Die parabolischen Kurven

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

schneiden sich in mn Punkten, von denen einer im Ursprung liegt. Die Kurven gehen in demselben eine Berührung i^{ter} Ordnung ein, wenn

$$f(0) = \varphi(0) \quad \text{oder} \quad a_1 = A_1$$

$$f'(0) = \varphi'(0) \quad \text{oder} \quad a_2 = A_2$$

. . . .

. . . .

$$f^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(0) \quad \text{oder} \quad a_i = A_i$$

ist.

2. Sind die Gleichungen der beiden Kurven in nicht entwickelter Form

$$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0$$

gegeben und sollen dieselben durch die beiden benachbarten Punkte

$$P(x,\ y) \quad \text{und} \quad P'(x + \triangle x,\ y + \triangle y)$$

gemeinschaftlich hindurchgehen, so müssen gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sein

$$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0,$$

$$f(x + \triangle x,\ y + \triangle y) = 0, \quad \varphi(x + \triangle x,\ y + \triangle y) = 0.$$

Die beiden Punkte P und P' rücken unendlich nah zusammen oder die beiden Kurven berühren sich in P, wenn $\triangle x$ und $\triangle y$ sich der Grenze 0 nähern. Um die Bedingungen hierfür zu ermitteln, entwickele man letztere Ausdrücke nach dem Taylorschen Satze für zwei Veränderliche nach Potenzen und Produkten von $\triangle x$, $\triangle y$, dann ist z. B.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + \triangle x,\ y + \triangle y) \\ &= f(x,\ y) + \triangle x \frac{\partial f}{\partial x} + \triangle y \frac{\partial f}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left\{\triangle x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \triangle x \triangle y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + \triangle y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} + \cdots \end{aligned}$$

Berücksichtigt man hierin noch, dass $f(xy) = 0$ ist und dividiert den rechts übrig bleibenden Ausdruck mit $\triangle x$ durch und setzt hierauf $\triangle y = 0$, $\triangle x = 0$, so folgt als Bedingung, dass die Kurve f durch die beiden benachbarten Punkte P und P' hindurchgeht

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

Das gleiche gilt für die Kurve $\varphi(xy) = 0$.

Die beiden Kurven f und φ haben somit eine gewöhnliche Berührung im Punkt P(xy), wenn für die Koordinaten desselben die Bedingungen erfüllt sind

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \quad \chi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0.$$

Ebenso findet man, dass im Punkt P(xy) drei gemeinschaftliche Schnittpunkte von f und φ vereinigt sind oder dass sich die beiden Kurven in P(xy) oskulieren, wenn neben

$$f = 0, \quad \varphi = 0; \qquad \psi = 0, \quad \chi = 0$$

noch

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} y' = 0$$

ist, oder wenn gleichzeitig die Bedingungen erfüllt sind

$$\left\{\begin{aligned} f &= 0, \\ f_1 + f_2 y' &= 0, \\ f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 + f_2 y'' &= 0, \\ \varphi &= 0, \\ \varphi_1 + \varphi_2 y' &= 0, \\ \varphi_{11} + 2 \varphi_{12} y' + \varphi_{22} y'^2 + \varphi_2 y'' &= 0 \end{aligned}\right.$$

etc. Es ergiebt sich daher folgender

Satz. Die Bedingungen, dass sich die beiden Kurven $f = 0$ und $\varphi = 0$ im Punkte P(xy) (i — 1)-punktig berühren oder dass i Schnittpunkte beider Kurven in P zusammenfallen, werden gewonnen, indem man jede der beiden Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

(i — 1)-mal nach x durchdifferentiiert.

Beispiel. Mittelpunkt (a, b) und Radius ϱ eines Kreises zu bestimmen, der die Kurve $f(xy) = 0$ in $P(xy)$ oskuliert.

Der gesuchte Kreis habe den Mittelpunkt $M(a, b)$, dann sollen sich 2-punktig berühren die beiden Kurven

$$f = 0, \quad \varphi = (x - a)^2 + (y - b)^2 - \varrho^2 = 0,$$

wofür die Bedingungen lauten

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ f_1 + f_2 y' &= 0, \\ f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 + f_2 y'' &= 0, \\ \varphi = (x - a)^2 + (y - b)^2 - \varrho^2 &= 0, \\ 2(x - a) + 2(y - b) y' &= 0, \\ 2 + 2 y'^2 + 2(y - b) y'' &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Ableitungen von $\varphi = 0$ erhält man

$$a = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

wo y' und y'' aus den Ableitungen von f zu entnehmen sind.

Beispiel. Einen Kreis zu bestimmen, die Parabel $y^2 = 2px$ im Punkt $P(xy)$ oskuliert.

Der Kreis habe den Mittelpunkt M(a, b) und den Radius ϱ, dann lauten die Bedingungen hierfür

$$f = y^2 - 2px = 0,$$
$$2yy' - 2p = 0,$$
$$y'^2 + yy'' = 0,$$
$$\varphi = (x-a)^2 + (y-b)^2 - \varrho^2 = 0,$$
$$x - a + (y-b)y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0,$$

woraus folgt

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3},$$

$$a = b + 3x, \quad b = -\frac{y^3}{p^2},$$

$$\varrho = -\frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = -\frac{N^3}{p^3},$$

wo N die Länge der Normale im Punkt P(xy) bezeichnet.

§ 66. **Der Krümmungskreis.**

a. Für rechtwinkelige Koordinaten.

1. Unter dem Krümmungskreis versteht man einen Kreis, der durch drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte geht oder nach dem vorigen die Kurve oskuliert. Er wird demgemäss auch Oskulationskreis genannt. Der Radius ϱ desselben wird entsprechend als Krümmungsradius und sein Mittelpunkt als Krümmungsmittelpunkt bezeichnet.

2. Je grösser der Radius ϱ des Krümmungskreises für einen gewissen Kurvenpunkt ist, um so kleiner ist die

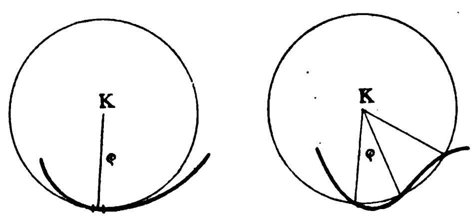


Fig. 51.

Krümmung der Kurve in diesem Punkt und umgekehrt. Man nennt deshalb $\frac{1}{\varrho}$ das **Krümmungsmass**.

3. Der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der zu P(xy) gehörigen Kurvennormale.

Ist PK ⊥ Tangente PA und P_1 ein weiterer beliebiger Kurvenpunkt und DK das Mittellot von PP_1, so berührt der Kreis um K die Kurve in P und schneidet dieselbe ausserdem noch in P_1. Rückt nun P_1 unendlich nah an P heran, so geht DK in eine zu PK benachbarte Kurvennormale über. Der Krümmungsmittelpunkt kann somit als Schnittpunkt zweier konsekutiver oder unendlich benachbarter Kurvennormalen angesehen werden.

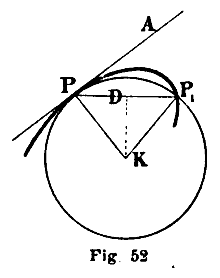


Fig. 52

Sind P(xy) und $P'(x + \triangle x, \; y + \triangle y)$ zwei benachbarte Kurvenpunkte, so haben die zugehörigen Normalen die Gleichungen

$$(1) \qquad \xi - x + f'(x)(\eta - y) = 0,$$

$$\xi - x - \triangle x + f'(x + \triangle x)(\eta - y - \triangle y) = 0,$$

woraus durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Division mit $\triangle x$ folgt

$$1 - (\eta - y)\frac{f'(x+\triangle x) - f'(x)}{\triangle x} + f'(x+\triangle x)\frac{\triangle y}{\triangle x} = 0.$$

Für $\triangle x = 0$ folgt endlich hieraus

$$(2) \qquad 1 - (\eta - y) f''(x) + y' f'(x) = 0.$$

Aus (1) und (2) berechnen sich die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes K und damit der Krümmungsradius ϱ aus (Fig. 53)

$$\varrho^2 = PK^2 = PC^2 + KC^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{y'}{y''}(1 + y'^2) \\[2ex] \eta = y + \dfrac{1}{y''}(1 + y'^2) \\[2ex] \varrho = \dfrac{1}{y''}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

4. Mit Zuhilfenahme des Ausdruckes für die Normale (§ 60) lassen sich diese Formeln auch schreiben

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{y'}{y''}\,\dfrac{N^2}{y^2} \\[2ex] \eta = y + \dfrac{1}{y''}\,\dfrac{N^2}{y^2} \\[2ex] \varrho = \dfrac{1}{y''}\,\dfrac{N^3}{y^3}. \end{cases}$$

5. Für die implizite Form der Kurvengleichung erhält man

$$1 + y'^2 = \frac{1}{f_2^2}(f_1^2 + f_2^2),$$

$$y'' = -\frac{1}{f_2^3}(f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11}),$$

und wenn man setzt

$$A = (f_1^2 + f_2^2) : (f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11})$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = x - A f_1 \\ \eta = y - A f_2 \\ \varrho = A\sqrt{f_1^2 + f_2^2}. \end{cases}$$

Fig. 53.

Fig. 54.

6. Der Kontingenzwinkel. Sind α und α_1 die Winkel, welche zwei konsekutive Tangenten mit der x-Achse machen, so heisst der Winkel

$$\alpha_1 - \alpha = d\alpha$$

oder der, den die zugehörigen Normalen einschliessen, der Kontingenzwinkel. Derselbe ist somit das Differential des Winkels, den die Tangente mit der x-Achse macht.

Dies vorausgesetzt ist

$$\varrho\, d\alpha = ds \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Satz. Das Krümmungsmass ist gleich dem Quotienten aus Kontingenzwinkel und Bogendifferential.

Nun ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} \alpha = y',$$

also

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y',$$

woraus durch Ableitung folgt

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Weil nun ferner

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

ist, so folgt auch hieraus

$$\varrho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{y''} (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

7. Wenn die Gleichung der Kurve in Parameterform

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben ist, so ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{\psi'}{\varphi'}}{dx} = \frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3},$$

womit die Formeln in Nr. 3 übergehen in

$$\xi = x - \frac{\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}, \quad \eta = y + \frac{\varphi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''},$$

$$\varrho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}.$$

Beispiel. $x = \varphi = t, \quad y = \psi = t^3.$

$$\varphi' = 1, \quad \varphi'' = 0; \quad \psi' = 3t^2, \quad \psi'' = 6t.$$

$$\xi = \frac{t}{2}(1 - 9t^4), \quad \eta = \frac{1}{6t}(1 + 15t^4),$$

$$\varrho = \frac{t}{6t}(1 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}.$$

b. Für Polarkoordinaten.

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben

$$r = f(\varphi),$$

so gehen obige Formeln über in

$$\xi = x - \frac{(r^2 + r'^2)(r' \sin\varphi + r\cos\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\eta = y + \frac{(r^2 + r'^2)(r' \cos\varphi - r\sin\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Beispiel. Für die Kardioïde ist

$$r = 2a(1 + \cos\varphi), \quad r' = -2a\sin\varphi,$$

$$r'' = -2a\cos\varphi, \quad \varrho = \frac{8}{3}a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt für

$$\varphi = 0, \quad \varrho = \frac{8}{3} a; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varrho = \frac{4}{3} a \sqrt{2},$$
$$\varphi = \pi, \quad \varrho = 0.$$

§ 67. Evolute und Evolvente.

1. Erklärung. Die Evolute $\varphi(\xi \eta)$ einer Kurve f(xy) ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes oder auch der Ort des Schnittpunktes zweier konsekutiver Kurvennormalen. Eine solche hat

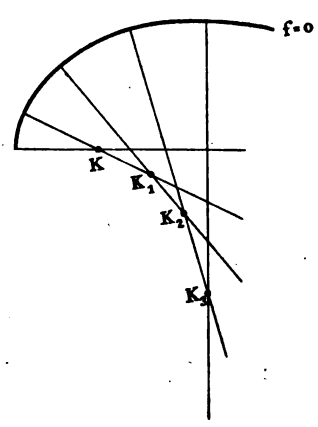


Fig. 55.

also mit der Evolute zwei unendlich benachbarte Punkte gemein; somit gilt der

Satz. Jede Kurvennormale ist eine Tangente an die Evolute.

Erklärung. Die gegebene Kurve f(xy) heisst auch Evolvente.

Man erhält die Gleichung der Evolute durch Elimination von x und y aus den Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} f(xy) = 0 \\ \xi = x - \dfrac{y'}{y''}(1 + y'^2) \\ \eta = y + \dfrac{1}{y''}(1 + y'^2). \end{cases}$$

2. Ist umgekehrt $\varphi(\xi\eta) = 0$ als Gleichung einer Evolute gegeben, so ergiebt sich diejenige der zugehörigen Evolvente durch Elimination von $\xi\eta$ aus

$$\varphi(\xi\eta) = 0$$

und den beiden letzten Gleichungen (1). Man erhält als $\xi\eta$-Eliminat

$$(2)\qquad \varphi\left\{x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),\ y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)\right\} = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der zu $\varphi(\xi\eta)$ als Evolute gehörigen Evolvente.

3. Wenn man einen um eine Evolute geschlungenen Faden straff gespannt abrollt, so beschreibt der Endpunkt des Fadens eine Evolvente f(xy). Da man diese Abwickelung beginnen kann, wo man will, so leuchtet ein, dass zu einer ge-

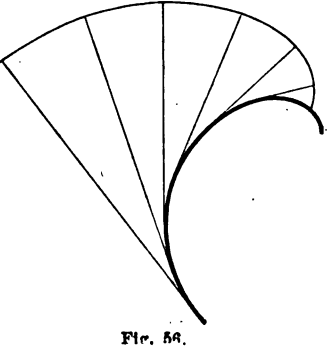


Fig. 56.

gebenen Evolute unendlich viele Evolventen gehören, die übrigens alle einander gleich sind. (Fig. 56.)

Beispiele. 1. Die Evolute der Parabel (Fig. 57) $y^2 = 2px$ hat die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{8}{27}\,\frac{(\xi - p)^3}{p}.$$

Man erhält dieselbe durch Elimination von x und y aus

$$y^2 = 2px, \quad \xi = 3x + p, \quad \eta = -\frac{y^2}{p}.$$

Die Evolute ist eine Neilsche Parabel (Fig. 57), deren Spitze in $P(p, 0)$ liegt.

2. Die Evolute der Ellipse zu bestimmen.

Die Gleichung der Evolute ergiebt sich durch Elimination von x und y aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad x^3 = \xi\frac{a^4}{e^2}, \quad y^3 = -\eta\frac{b^4}{e^2}.$$

Man erhält

$$\varphi(\xi\eta) = \left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,$$

wo $a_1 = \frac{e^2}{a}$, $b_1 = \frac{e^2}{b}$ gesetzt ist. Die Evolute (Fig. 58) ist eine Asteroide (Sternkurve) mit vier Spitzen $P(a_1, 0)$, $P(-a_1, 0)$, $P(0, b_1)$, $P(0, -b_1)$.

3. Die Evolute der Hyperbel hat die Gleichung

$$\varphi(\xi\eta) = \left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,$$

die durch Elimination von x und y aus

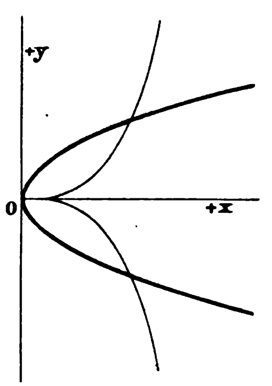


Fig. 57.

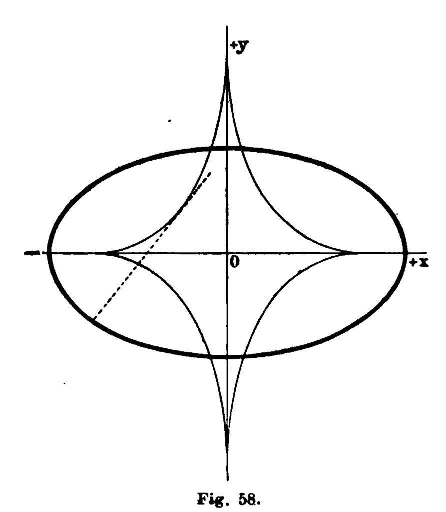


Fig. 58.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad x^3 = \xi \frac{a^4}{e^2}, \quad y^3 = -\eta \frac{b^4}{e^2}$$

erhalten wird.

§ 68. Einhüllende Kurven.

1. Die Gleichung einer ebenen Kurve enthalte neben den Veränderlichen xy noch eine willkürliche Grösse p — einen sogenannten Parameter — und sei dargestellt durch

$$f(xyp) = 0.$$

Legt man hierin der Grösse p alle möglichen Werte bei, so erhält man auch ebensoviele ebene Kurven, die im allgemeinen in ihren gestaltlichen und Lagenverhältnissen etwas von einander abweichen und sich in gewissen Punkten durchschneiden können. In diesem Sinne stellt obige Gleichung ein einfach unendliches System von ebenen Kurven, eine Kurvenschar dar, deren einzelne Kurven sämtlich von einer festen ebenen Kurve berührt werden, welche man als Umhüllungslinie der Kurvenschar bezeichnet. Die einzelnen Kurven selbst heissen auch die Eingehüllten.

So stellt beispielsweise (Fig. 23)

$$f(xyp) = (x - p)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

eine Schar von Kreisen vom Radius a dar, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen und welche sämtlich von den beiden Geraden $y \mp a = 0$ berührt werden. Letztere bilden zusammen die Umhüllungslinie dieser Kreisschar.

Die Gleichung der Umhüllungslinie $U(xy) = 0$ ergiebt sich allgemein durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$f(xyp) = 0, \quad \frac{\partial f(xyp)}{\partial p} = 0.$$

Um dies einzusehen, lasse man in $f(xyp) = 0$ den Parameter p um $\triangle p$ wachsen, dann erhält man eine zweite Kurve von der Gleichung

$$f(xy, p + \triangle p) = 0,$$

welche die erste in den Punkten $PP'P''\ldots$ schneiden möge. Da deren Koordinaten die eben genannten Gleichungen befriedigen, so muss auch die folgende gelten

$$\frac{1}{\triangle p}\left\{ f(xy, p + \triangle p) - f(xyp) \right\} = 0.$$

Nähert sich hierin $\triangle p$ der Grenze 0, so werden auch die Punkte $pp'p''\ldots$ bestimmte Grenzlagen annehmen, deren Koordinaten nicht nur der Gleichung $f(xyp) = 0$, sondern auch der folgenden genügen müssen $\frac{\partial f(xyp)}{\partial p} = 0$, in welche die letzte Gleichung für $\triangle p = 0$ übergeht.

Auf jeder Kurve der Schar $f(xyp) = 0$ liegen derartige Punkte $PP'P''$.., deren Koordinaten man durch Berechnung von x und y aus $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ erhält. Durch Elimination von p aus diesen Gleichungen ergiebt sich die Gleichung einer neuen Kurve, welche ebenfalls durch diese Punkte hindurchgehen muss. Da dieselbe aber von p unabhängig ist, so geht sie durch alle Schnittpunkte konsekutiver Kurven hindurch, d. h. sie berührt sämtliche Kurven der Schar und stellt somit die gesuchte Umhüllungslinie dar.

Beispiele. 1. Die Umhüllungslinie aller Geraden zu finden, die von den Achsen Stücke von konstanter Summe a abschneiden.

Ist das eine Stück p, so ist das andere a — p, daher hat die Geradenschar die Gleichung

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{a - p} = 1$$

oder

$$f(xyp) = x(a - p) + yp - pa + p^2 = 0.$$

Durch partielle Ableitung nach p folgt hieraus

$$-x + y - a + 2p = 0$$

und aus beiden Gleichungen nach Elimination von p als Gleichung der Umhüllungslinie

$$U(xy) = (x + y - a)^2 - 4xy = 0.$$

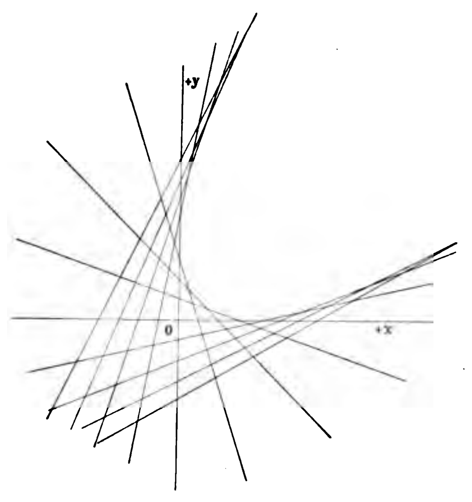


Fig. 59.

Dieselbe stellt eine Parabel in der in der Figur angegebenen Lage dar.

3. Die Umhüllungslinie aller Ellipsen zu bestimmen, für welche die Summe der Halbachsen konstant $= a$ ist.

Ist p die eine, so ist $a - p$ die andere halbe Achse, daher hat die Ellipsenschar die Gleichung

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{(a-p)^2} - 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$f(xyp) = (a-p)^2 x^2 + p^2 y^2 - p^2 (a-p)^2 = 0,$$

woraus durch partielle Ableitung nach p folgt

$$(p - a)x^2 + py^2 + p(2p - a)(a - p) = 0$$

Die Elimination von p aus beiden Gleichungen giebt als Gleichung der Umhüllungslinie

$$U(xy) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0,$$

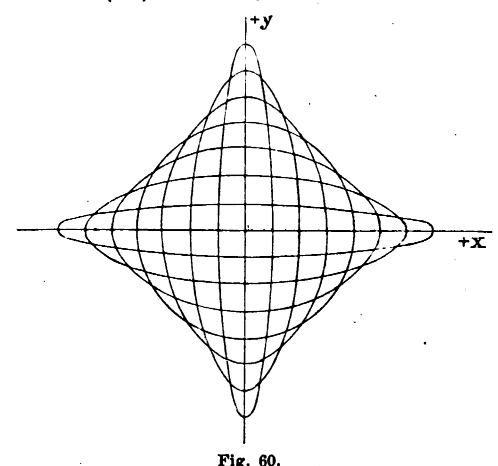


Fig. 60.

welche eine Kurve sechster Ordnung mit vier Spitzen darstellt und als Asteroide bekannt ist.

2. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass sein Scheitel beständig auf der y-Achse weitergleitet und ein Schenkel durch einen festen Punkt (a, 0) auf der x-Achse geht. Welches ist die Einhüllende des anderen Schenkels?

Schneidet der durch (a, 0) gehende Schenkel des rechten Winkels die y-Achse im Punkt $(0, \lambda)$, so ist die Gleichung der Linienschar (Gleichung des anderen Schenkels) angegeben durch

$$ax - \lambda y + \lambda^2 = 0.$$

Durch partielle Ableitung nach λ folgt hieraus

$$-y + 2\lambda = 0$$

und durch Elimination von λ aus beiden Gleichungen als Gleichung der Umhüllungslinie

$$y^2 - 4ax = 0.$$

Dieselbe ist somit eine Parabel mit dem Parameter 2a, welche die y-Achse in $x = 0$ berührt.

§ 69. Anwendung der Differentialrechnung zur Quadratur der Kurven.

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, welche innerhalb des Gebietes $x = x$ bis $x = a$ endlich und stetig ist, dann zeigt auch die durch $y = f(x)$ dargestellte Kurve zwischen den Punkten P und Q mit den Abcissen x und a einen stetigen Verlauf.

Der Inhalt der von den Ordinaten PA und QB, der Abscissenachse und dem Kurvenbogen PQ begrenzten Fläche sei U. Um dieselbe näherungsweise zu berechnen, teile man wie in § 11 die Strecke

$$AB = OB - OA = a - x$$

in n gleiche Teile von der Länge $\triangle x$ und errichte in den Teilpunkten die zugehörigen Ordinaten

$$f(x + \triangle x),\ f(x + 2\triangle x),\ \ldots,\ f(x + n\triangle x),$$

wo
$$x + n\triangle x = a$$

ist, dann wird die Fläche U in n Streifen zerlegt, die näherungsweise als Rechtecke von der Breite $\triangle x$ und den Längen

$$f(x),\ f(x + \triangle x),\ \ldots,\ f(x + [n - 1]\triangle x)$$

oder als solche von der gleichen Breite $\triangle x$ und den Längen

$$f(x + \triangle x),\ f(x + 2\triangle x),\ \ldots,\ f(x + n\triangle x)$$

angesehen werden können. Bezeichnet man die Summe der ersteren mit U_n, die der letzteren mit U'_n, so ist

$$(1)\quad \begin{aligned} U_n &= f(x)\triangle x + f(x + \triangle x)\triangle x + \ldots \\ &\qquad + f(x + ([n - 1]\triangle x)\triangle x, \\ U'_n &= f(x + \triangle x)\triangle x + f(x + 2\triangle x)\triangle x \ldots \\ &\qquad + f(x + n\triangle x)\triangle x. \end{aligned}$$

Jedes Glied dieser Summen wird für $n = \infty$ unendlich klein und stellt alsdann einen unendlich kleinen Streifen der Fläche U dar, den man als Flächenelement bezeichnet.

Ein Blick auf die Figur zeigt, dass der Wert von U zwischen dem von U_n und U'_n liegt. Es ist daher

$$(2)\qquad U_n < U < U'_n.$$

Mit Berücksichtigung der Bedingung

$$x + n\triangle x = a$$

erhalten wir durch Subtraktion der Gleichungen (1)

$$(3)\qquad U'_n - U_n = \triangle x\{f(a) - f(x)\}.$$

Lässt man hierin n immer grösser und damit $\triangle x$ immer kleiner werden, so nähert sich die rechte Seite

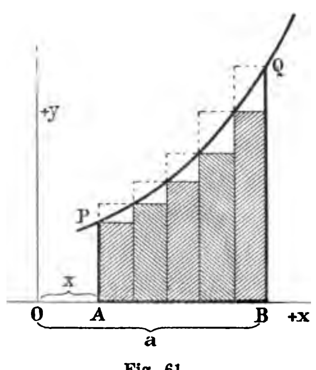


Fig. 61.

dieser Gleichung mehr und mehr der Grenze Null, d. h. es ist

$$\lim_{n=\infty} (U'_n - U_n) = 0$$

oder

(4) $$\lim U_n = \lim U'_n .$$

Diese Gleichung kann aber neben den Bedingungen (2) offenbar nur bestehen, wenn

(5) $$\lim U_n = U = \lim U'_n$$

ist. Es gilt somit der

Satz. Jede der Summen U_n oder U'_n nähert sich bei unendlich wachsendem n dem Grenzwert U, der geometrisch den Inhalt der Fläche PABQ darstellt.

Entwickelt man nach dem Satze von Taylor § 43 in einer der Summen (1), z. B. in U_n jeden der Summanden

$$f(x + k\triangle x),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1,$$

nach Potenzen von $k\triangle x$ und fasst die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\triangle x$ zusammen, so geht U_n über in

$$(6)\quad U_n = \triangle x \left\{ n f(x) + \frac{\triangle x}{1} S_1 f'(x) + \frac{\triangle x^2}{2!} S_2 f''(x) + \ldots \right\}$$

wo

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

die Summe der k^{ten} Potenzen der n ersten Zahlen bezeichnet. Setzt man hierin an Stelle von $\triangle x$ den Quotienten $\frac{a - x}{n}$, so nimmt U_n die Gestalt an

$$(7)\quad \begin{aligned} U_n = (a - x) f(x) &+ \frac{(a - x)^2}{1!} f'(x) \frac{S_1}{n^2} \\ &+ \frac{(a - x)^3}{2!} f''(x) \frac{S_2}{n^3} + \ldots, \end{aligned}$$

welche sogleich in $\lim U_n$ übergeht, wenn man an Stelle der Quotienten $\frac{S_1}{n^2}, \frac{S_2}{n^3}, \ldots$ deren Grenzwerte einsetzt. Letztere sind aber nach § 9 gleich $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Somit ist der Inhalt der Fläche $U = PABQ$ dargestellt durch den Ausdruck

$$(8)\quad \begin{aligned} U = \lim U_n = (a - x) f(x) &+ \frac{(a - x)^2}{2!} f'(x) \\ &+ \frac{(a - x)^3}{3!} f''(x) + \ldots, \end{aligned}$$

der eine nach Potenzen von $a - x$ fortschreitende konvergente Potenzreihe repräsentiert, deren Summe

$$\lim U_n = \lim U'_n = U$$

ist. Somit gilt der

Satz. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen x und a stetig verlaufenden Kurve, so lässt sich der Flächeninhalt U durch eine nach Potenzen von $a - x$ fortschreitende konvergente Potenzreihe darstellen, deren Koeffizienten durch Ableitung von $f(x)$ erhalten werden.

Ist $x = 0$, d. h. liegt der Punkt P auf der y-Achse,

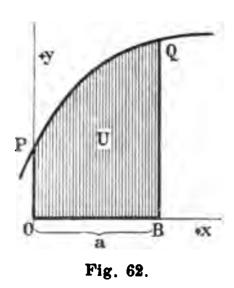


Fig. 62.

so ist der Inhalt U des Flächenstückes POBQ (Fig. 62) dargestellt durch

$$(9) \qquad U = a f(0) + \frac{a^2}{2!} f'(0) + \frac{a^3}{3!} f''(0) \dots$$

Beispiele. 1. Um das Flächenstück zu berechnen, das von der Parabel $y = px^n$, der x-Achse und der Ordinate QB des Punktes Q mit der Abcisse a eingeschlossen wird, erhält man

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \; f^{(n)}(0) = pn!,$$

daher ist nach Formel (9)

$$U = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} pn! = p \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

2. Zur Berechnung der Fläche U der Sinuslinie $y = \sin x$ in § 11 (Fig. 63) erhält man

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x \text{ etc.}$$

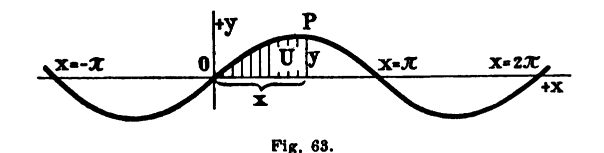


Fig. 63.

und daher nach Formel (9)

$$U = \frac{a^2}{2!} - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots = 1 - \cos a.$$

Siehe § 46.

Anmerkung. Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben $r = f(\varphi)$, so ist der Flächeninhalt U, der von den Radienvektoren OP und OQ mit

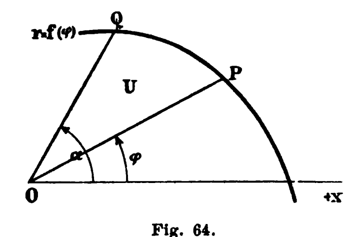


Fig. 64.

den Amplituden φ und α und dem Kurvenbogen PQ eingeschlossen ist (Fig. 64), dargestellt durch die Reihe

$$U = \frac{1}{2}\left\{(\alpha - \varphi) f^2 + \frac{1}{2!}(\alpha - \varphi)^2 \frac{d f^2}{d\varphi} + \frac{1}{3!}(\alpha - \varphi)^3 \frac{d^2 f^2}{d\varphi^2} + \ldots\right\},$$

die in ähnlicher Weise herzuleiten ist wie die Reihe (8).

Beispiel. Für die Archimedische Spirale ist

$$r = a\varphi,$$

daher

$$r^2 = a^2 \varphi^2 = f^2,$$

und somit der Flächeninhalt zwischen den Azimuts φ und α

$$U = \frac{1}{2}\left\{(\alpha - \varphi) a^2 \varphi^2 + \frac{1}{2!}(\alpha - \varphi)^2 2a^2\varphi + \frac{1}{3!}(\alpha - \varphi)^3 2a^2\right\} = \frac{a^2}{6}(\alpha^3 - \varphi^3).$$

IX. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie des Raumes.

§ 70. Tangentialebene, Normale einer Fläche.

1. Es sei $z = f(xy)$ die Gleichung einer krummen Fläche und $P(xyz)$ ein Punkt derselben. Eine beliebige durch denselben gehende Ebene hat die Gleichung

$$(1) \qquad \zeta - z = m(\xi - x) + n(\eta - y),$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten bezeichnen.

Legt man durch P die beiden Ebenen $\eta = y$ und $\xi = x$ parallel zur zx-Ebene und yz-Ebene, so

schneiden dieselben aus der Fläche f zwei ebene Kurven heraus, deren Tangenten die Gleichungen haben

$$(2) \quad \zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) \text{ bezw. } \zeta - z = \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y).$$

Diese liegen in der Ebene (1), wenn

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = n$$

ist. Die Ebene (1) geht damit in die Tangential-

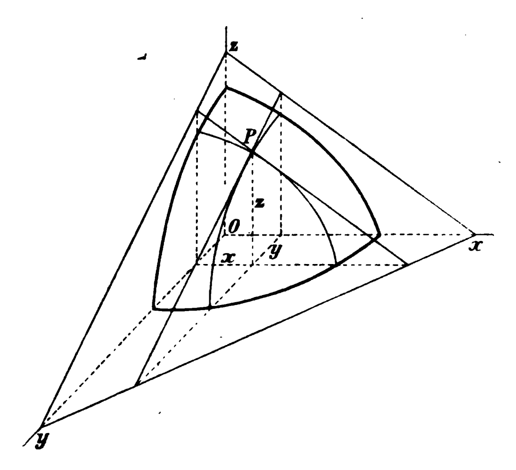


Fig. 65.

ebene der Fläche $z = f(xy)$ im Punkt $P(xyz)$ über und erhält die Gleichung

$$(4) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

gesetzt ist.

Erklärung. Jede durch den Punkt $P(xyz)$ in der Ebene (4) gezogene Gerade schneidet die Fläche in zwei unendlich benachbarten Punkten: sie ist eine Tangente an die Fläche f. Die Ebene (4) heisst deshalb Tangentenebene oder Tangentialebene derselben.

Beispiel. Die Gleichung der Tangentialebene des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ im Punkt $P(xyz)$ aufzustellen.

Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = 2y,$$

somit erhält die Tangentialebene die Gleichung

$$\zeta - z = 2x(\xi - x) + 2y(\eta - y)$$

oder

$$\zeta + z = 2\xi x + 2\eta y$$

2. Erklärung. Eine im Punkte P auf der Tangentialebene, also auch auf der Fläche $z = f(xy)$ senkrecht stehende Gerade heisst Normale der Fläche.

Dieselbe erhält, wie die analytische Geometrie lehrt, die Gleichungen

$$\text{(5)} \qquad \frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{1}.$$

3. Ist die Gleichung der Fläche in der impliciten Form

$$f(xyz) = 0$$

gegeben, dann erhält diejenige der Tangentialebene die Gestalt

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

wo $\xi\,\eta\,\zeta$ wieder wie oben die laufenden Koordinaten bezeichnen.

Die Flächennormale im Punkt $P(x\,y\,z)$ ist dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

wie sich vermöge bekannter Sätze der analytischen Geometrie ergiebt.

Beispiel. Die Gleichungen der Tangentialebene und der Normalen des dreiachsigen Ellipsoides

$$f(x\,y\,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

im Punkt $P(x\,y\,z)$ aufzustellen.

Man erhält als Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1 = 0$$

und als Gleichungen der Normalen

$$\frac{a^2}{x}(\xi - x) = \frac{b^2}{y}(\eta - y) = \frac{c^2}{z}(\zeta - z).$$

Anmerkung. Die vorstehenden Betrachtungen werden ungültig, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ zugleich verschwinden. In diesem Fall wird der Punkt P ein singulärer Punkt der Fläche, auf dessen Untersuchung hier nicht weiter eingegangen werden kann.

§ 71. Das Bogenelement einer Raumkurve.

Eine Raumkurve kann als Durchdringungskurve zweier räumlichen Flächen, z. B. zweier zur xy-Ebene und zx-Ebene senkrechten Cylinderflächen angesehen werden. In diesem Fall kann sie dargestellt werden durch die Gleichungen

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x). \tag{1}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch ersetzen durch die folgenden

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = x(t), \tag{2}$$

wo nun jeder Punkt der Raumkurve in Funktion eines Parameters t ausgedrückt ist.

Sind P und P' zwei benachbarte Punkte derselben mit den Koordinaten $x\,y\,z$; $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, $z + \triangle z$, so ist deren Entfernung angegeben durch

$$\triangle s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2}. \tag{3}$$

Die Grösse $\triangle s$ geht in das Bogenelement der Raumkurve über, wenn die Punkte P und P' unendlich nahe zusammenrücken. Setzt man in Gleichung (3) $\triangle x$ vor die Wurzel und lässt man $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ in dx, dy, dz übergehen, so folgt der

Satz. Das Bogenelement einer Raumkurve ist angegeben durch

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx \tag{4}$$

oder auch durch

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Die Winkel α, β, γ, welche das Element ds mit den Koordinatenachsen bildet, heissen die Richtungswinkel desselben. Für die Cosinuse dieser Winkel gelten die Ansätze

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Beispiel. Die Schraubenlinie hat bekanntlich die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

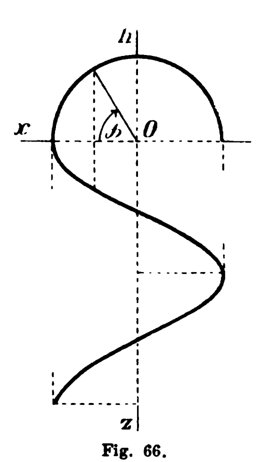


Fig. 66.

Für dieselbe ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{h}{2\pi}$$

und demnach

$$ds = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, d\varphi.$$

§ 72. Tangente, Normalebene einer Raumkurve.

1. Erklärung. Die gerade Linie, welche zwei benachbarte Punkte einer Raumkurve verbindet, heisst eine Tangente derselben. Die Ebene, welche im Punkt P auf der Tangente und somit auch auf der Kurve senkrecht steht, heisst die Normalebene der Raumkurve in diesem Punkt.

Eine einfache Betrachtung führt zu dem

Satz. Die Tangente der Raumkurve im Punkt $P(xy)$ ist darstellbar durch die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \tag{1}$$

desgl. die Normalebene durch

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0. \tag{2}$$

Die Differentiale dx, dy, dz werden ermittelt, indem man die Gleichungen der Raumkurve differentiiert. Bewegt sich die Tangente einer Raumkurve längs derselben fort, so beschreibt sie eine Kegelfläche, welche den Namen Tangentenfläche führt. Auf die Untersuchung dieser Fläche kann hier nicht eingegangen werden.

Beispiel. Eine Raumkurve sei dargestellt durch

$$y = x^3 - x^2, \quad z = x^2 + y^2.$$

Es sollen die Gleichungen der Tangente und der Normalebene im Punkt $P(1, 0, 1)$ aufgestellt werden.

Durch Ableitung folgt hieraus

$$dy = (3x^2 - 2x)dx, \quad dz = 2xdx + 2ydy$$

oder für $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

$$dy = dx, \quad dz = 2dx,$$

somit ist die Tangente im Punkt $P(1, 0, 1)$ dargestellt durch

$$\xi - 1 = \eta = \frac{\zeta - 1}{2}$$

und die Normalebene durch

$$(\xi - 1) + \eta + 2(\zeta - 1) = 0.$$

2. Erklärung. Eine Ebene, welche durch drei unendlich benachbarte Punkte $PP'P''$ einer Raumkurve hindurchgeht, wird als Schmiegungsebene derselben im Punkt P bezeichnet. Die Schnittgerade von Schmiegungsebene und Normalebene heisst die Hauptnormale der Raumkurve im Punkt P. Auf derselben liegt der Krümmungsmittelpunkt der Raumkurve, d. h. der Mittelpunkt eines Kreises, des Krümmungskreises, der durch die drei benachbarten Kurvenpunkte $PP'P''$ hindurchgeht.

Ist die Raumkurve dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

so ist die Schmiegungsebene derselben im Punkt $P(xyz)$ angegeben durch

$$(3) \quad \begin{aligned} (\xi - \varphi)(\psi'\chi'' - \chi'\psi'') + (\eta - \psi)(\chi'\varphi'' - \varphi'\chi'') \\ + (\zeta - \chi)(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'') = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ergiebt sich, indem man in

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

die Konstanten A, B, C, D so bestimmt, dass die hierdurch dargestellte Ebene durch drei benachbarte Kurvenpunkte hindurchgeht.

X. Abschnitt.

Kurzer Exkurs auf das Gebiet der Mechanik.

§ 73. Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Die Bewegung eines Punktes kann geradlinig oder krummlinig sein. Die Länge der Bahn, welche derselbe in der Zeit t zurückgelegt, wird der Weg s genannt. Letzterer kann somit als Funktion der Zeit betrachtet und durch die Gleichung

$$s = f(t) \tag{1}$$

ausgedrückt werden.

Im einfachsten Falle ist durch

$$s = ct$$

eine gleichförmige Bewegung angegeben, weil hier in beliebigen gleichen Zeiten stets der gleiche Weg zurückgelegt wird. Der Weg c, der in der Zeiteinheit beschrieben wird, heisst die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung und ist angegeben durch das Verhältnis

$$c = \frac{s}{t}. \tag{2}$$

Im Fall einer ungleichförmigen Bewegung, wo die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege verschieden sind, versteht man unter der Geschwindigkeit v das Verhältnis des unendlich kleinen Weges ds zur Zeit dt, in welcher derselbe beschrieben wird. Für eine solche Bewegung ist somit die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt angegeben durch

3) $$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Letztere ist, wie auch der Weg s, eine Funktion der Zeit t und wird sich im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändern. In diesem Falle erhalten wir eine ungleichförmige Bewegung, deren Geschwindigkeit also in jeder Sekunde zu- oder abnimmt. Diese Zunahme, welche die Geschwindigkeit in jedem Augenblick erfährt, heisst die Beschleunigung der ungleichförmigen Bewegung. Sie ist im einfachsten Falle $v = pt$ konstant und ausgedrückt durch das Verhältnis von Geschwindigkeit und Zeit

$$p = \frac{v}{t}. \tag{4}$$

In derselben Weise, wie oben in (3) die Geschwindigkeit als Verhältnis von ds zu dt dargestellt, so wird auch allgemein die Beschleunigung als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit bestimmt.

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t). \tag{5}$$

Dieselbe ist somit im allgemeinen auch eine Funktion der Zeit.

Beispiel. Die Formeln des freien Falles herzuleiten.

Die Anziehungskraft der Erde erteilt jedem frei fallenden Körper eine Beschleunigung, welche erfahrungsgemäss für unsere Breite konstant und gleich

$$p = \frac{dv}{dt} = g = 9{,}81 \text{ m}$$

ist. Diese Gleichung ist offenbar durch Differentiation nach t hervorgegangen aus

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + c_1$$

und diese wieder aus

$$s = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2 .$$

Soll nun bei Beginn der Bewegung, also für $t = 0$, der Weg s sowie auch v gleich Null sein, so ergiebt sich $c_1 = c_2 = 0$. Der freie Fall eines Körpers ist somit bestimmt durch die Gleichungen

$$s = \frac{1}{2} g t^2, \quad v = g t .$$

§ 74. Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

Bewegt sich ein Punkt P unter dem Einfluss von irgend welchen Kräften in der Ebene, so werden auch seine Projektionen P_x und P_y auf die beiden Koordinatenachsen gewisse Geschwindigkeiten v_x und v_y und Beschleunigungen p_x und p_y besitzen, die sich genau wie die entsprechenden im vorigen Paragraphen betrachteten Grössen darstellen lassen. Sind x und y die Koordinaten des Punktes P, so erhält man als Komponenten der Geschwindigkeit v

$$(1) \qquad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

und als Komponenten der Beschleunigung p

$$(2) \qquad p_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{d^2 y}{dt^2},$$

die sämtlich wieder als Funktionen der Zeit t erscheinen.

Die Bahnen, welche Projektionen P_x und P_y beschreiben, sind die Koordinatenachsen. Sind die Be-

wegungen derselben durch Gleichungen von der Form (1) in § 73 bekannt

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

so lässt sich hieraus nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte auch sofort die **resultierende Bewegung** des Punktes P bestimmen. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (3) ergiebt sich die Gleichung der Bahnkurve, in welcher die resultierende Bewegung stattfindet.

Die Ableitung dieser Gleichungen nach t giebt

$$\left\{\begin{array}{ll} v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), & v_y = \frac{dy}{dt} = \psi'(t), \\ p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t), & p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \psi''(t). \end{array}\right. \tag{4}$$

Die resultierende Geschwindigkeit erhält hieraus den Wert

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}, \tag{5}$$

ebenso die Beschleunigung p

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}. \tag{6}$$

Endlich bestimmt sich die Richtung der Geschwindigkeit aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\psi'}{\varphi'}, \tag{7}$$

wo α den Winkel bedeutet, den die Richtung der Geschwindigkeit mit der + x-Achse macht.

§ 75. Anwendung auf den schiefen Wurf.

Die Bewegung eines unter dem Winkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 schief aufwärts geworfenen Körpers zu untersuchen.

Die Bewegung erfolgt in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gelegten vertikalen Ebene. In derselben werde die x-Achse horizontal, die + y-Achse vertikal aufwärts angenommen. Dies vorausgeschickt, lässt sich die Bewegung des geworfenen Körpers in eine horizontale in der Richtung der x-Achse stattfindende und in eine vertikale in der Richtung der y-Achse vor sich gehende Bewegung zerlegen. Da bei dieser Bewegung keine andere Kraft als die Anziehungskraft der Erde vorhanden ist, welche vertikal abwärts die Beschleunigung $g = 9{,}81$ m hervorbringt, so gelten die Gleichungen

$$(1) \qquad p_x = \frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \quad p_y = \frac{d^2 y}{d t^2} = -g.$$

Diese sind offenbar durch Differentiation nach t entstanden aus

$$(2) \qquad v_x = \frac{d x}{d t} = c_1, \quad v_y = \frac{d y}{d t} = -g t + c_2$$

und diese wieder aus

$$(3) \qquad x = c_1 t + c_3, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_2 t + c_4,$$

wo c_1, c_2, c_3, c_4 Konstante bezeichnen.

Da nun der Voraussetzung gemäss der Anfangspunkt der Bewegung ($t = 0$) in 0 liegen soll, so folgt hieraus (für $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$)

$$c_3 = c_4 = 0.$$

Da ferner bei Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit den Wert v_0, also die Komponenten die Werte $v_0 \cos \alpha$ und $v_0 \sin \alpha$ haben sollen, so folgt aus (2)

$$\left.\frac{d x}{d t}\right|_{t=0} = c_1 = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{d y}{d t} = c_2 = v_0 \sin \alpha,$$

womit die Konstanten c bestimmt sind und die Gleichungen (2) und (3) die Gestalt erhalten

$$(2)^* \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

$$(3)^* \quad x = t v_0 \cos\alpha, \quad y = t v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

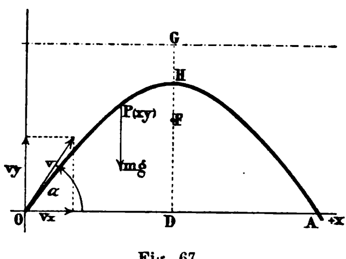


Fig. 67.

Durch Elimination von t aus den Gleichungen (3)* ergiebt sich als Gleichung der Flugbahn

$$(4) \quad y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha},$$

die eine Parabel darstellt, welche durch den Ursprung geht, die Scheitelkoordinaten

$$(5) \quad \xi = OD = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha, \quad \eta = HD = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$$

und den Parameter

$$(6) \quad p = FG = \frac{v_0^2}{g} \cos^2\alpha$$

besitzt.

Für $y = 0$ ergiebt sich aus Gleichung (4) nach Fig. 67 als Wurfweite

$$OA = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,$$

die für

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = 45^0$$

ihren grössten Wert erreicht.

Die Wurfhöhe $HD = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 a$ erhält ihren Maximalwert für $\sin\alpha = 1$, oder $\alpha = 90^0$.

Die Direktrix der durch (4) dargestellten parabolischen Bahn ist parallel zur x-Achse und geht durch den Endpunkt, der bei senkrechtem Wurf aufwärts erreicht wird. Da ihre Entfernung $GD = \frac{v_0^2}{2g}$ von der x-Achse unabhängig von α ist, so gilt der

Satz. Werden mehrere Körper mit derselben Anfangsgeschwindigkeit unter verschiedenen Winkel aufwärts geworfen, so beschreiben dieselben ebensoviele Parabeln, die sämtlich die gleiche Direktrix besitzen.

Sieht man in Gleichung (4) α als veränderlich an, so stellt dieselbe eine Schar von Parabeln dar, deren Umhüllungslinie die Gleichung hat

$$(7) \qquad x^2 = \frac{2 v_0^2}{g} \left(\frac{v_0^2}{2g} - y \right).$$

Diese ist eine Parabel, deren Brennpunkt im Wurfpunkt und deren Scheitel in der y-Achse in der Entfernung $\frac{v_0^2}{2g}$ von der x-Achse liegt (welche also die

Direktrix obiger Parabelbahnen in $x = 0$, $y = \frac{v_0^2}{2g}$ berührt). Das zugehörige Drehungsparaboloid ist bei gewissen Springbrunnen als Aussenfläche einer Garbe von Wasserstrahlen zu beobachten.

Die Brennpunkte aller durch (4) dargestellten parabolischen Bahnen mit den Koordinaten

$$\xi = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad \eta = -\frac{v_0^2}{2g} \cos 2\alpha \tag{8}$$

liegen auf einem Kreis vom Radius $\frac{v_0^2}{2g}$ um den Ursprung 0, der die Gleichung hat:

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{v_0^4}{4g^2} = 0. \tag{9}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (5) die Grösse α, so folgt als Gleichung des geometrischen Orts, den der Scheitel dieser Parabeln beschreibt (Fig. 68),

$$\xi^2 + 4\eta^2 - \frac{2v_0^2}{g}\eta = 0. \tag{10}$$

Derselbe ist eine Ellipse, welche die x-Achse und die Direktrix in $x = 0$ berührt und die Halbachsen

$$\frac{v_0^2}{2g}, \quad \frac{v_0^2}{4g}$$

besitzt.

Quadriert und addiert man die Gleichungen (2)*, so erhält man mit Benutzung von (3)*

$$v^2 = v_0^2 - 2gy. \tag{11}$$

Dies ist aber derselbe Ausdruck, den wir auch in § 73 für die Geschwindigkeit eines senkrecht auf-

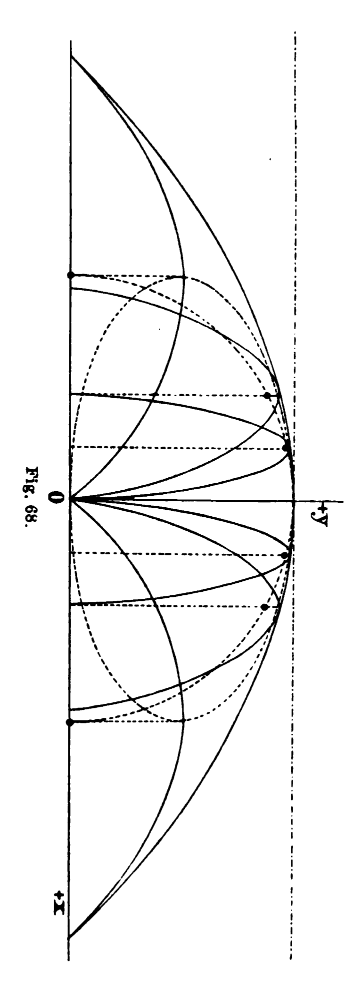


Fig. 68.

wärts geworfenen Körpers erhalten haben. Da derselbe von a unabhängig ist, so gilt der

Satz. Werden eine Reihe von Körpern mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit unter verschiedenen Winkeln aufwärts geworfen, so haben alle beim Durchgang durch dieselbe Horizontalebene (Niveaufläche) stets die gleiche Geschwindigkeit.

Dieselbe wird ein Minimum, nämlich $v_0 \cos a$ gleich der horizontalen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit, wenn der Körper den höchsten Punkt der Bahn passiert.

Hat ein Parabelpunkt mit der Ordinate y von der Direktrix die Entfernung η, so ist

$$y + \eta = \frac{v_0^2}{2g},$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \eta,$$

womit die Gleichung (11) übergeht in

$$v^2 = 2g\eta.$$

Durch diese Beziehung ist aber der Satz gewonnen:

Satz. Bei der parabolischen Bewegung ist die Geschwindigkeit in jedem Punkt der Bahn gleich der Fallgeschwindigkeit, welche der Tiefe des Bahnpunktes unterhalb der Direktrix entspricht.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Magnetismus siehe: Physik, Theoretische, III.

Malerei, Geschichte der, von Prof. Dr. Rich. Muther. I. II. III. IV. V. Nr. 107, 108, 109, 110, 111.

Mechanik siehe: Physik, Theoretische, I.

Menschliche Körper, Der, sein Bau und seine Thätigkeiten von Oberrealschuldirektor E. Rebmann, und Gesundheitslehre von Dr. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Meteorologie von Dr. W. Trabert. Mit 49 Abbild. und 7 Tafeln. Nr. 54.

Mineralogie von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Minnesang siehe: Walther von der Vogelweide.

Murner, Thomas, siehe: Luther.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. Nr. 121.

Mythologie, Deutsche, von Prof. Dr. Friedr. Kauffmann. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Prof. Dr. Herm. Steuding. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nautik von Direktor Dr. Franz Schulze. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Prof. Dr. W. Golther. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Dr. J. Behrens. Mit 53 Abbildungen. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein. Nr. 12.

— siehe auch: Schulpraxis.

Paläontologie. Von Prof. Dr. Rud. Hoernes. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Perspektive nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Hans Freyberger. Mit 88 Figuren. Nr. 57.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Prof. Dr. W. Migula. Nr. 127.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke und Prof. Dr. W. Migula. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Philosophie, Einführung in die, siehe: Psychologie und Logik.

Photographie. Von H. Keßler. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Poesie des 7jährigen Krieges siehe Lessings Philotas.

Poetik, Deutsche, von Dr. Karl Borinski. Nr. 40.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps. Mit 3 Fig. Nr. 98.

Redelehre, Deutsche, von Hans Probst. Mit einer Tafel. Nr. 61.